

Exercice 1 – Le saut à ski

Le premier sauteur à ski connu était un lieutenant norvégien du nom de Olaf Rye, qui en 1809 s'est élancé à 9,5 m dans les airs devant un public composé d'autres soldats.

Le désir de sauter plus haut et plus loin a mené en 1985 à une innovation importante, la position en V pour laquelle le sauteur dispose ses skis en « V » plutôt qu'en position parallèle, une fois dans les airs. On a attribué ce nouveau style au sauteur à ski suédois, Jan Boklöv. La plupart des sauteurs à ski de l'époque se sont moqués de cette technique, et M. Boklöv a été pénalisé pour son style non orthodoxe.



Gregor Schlierenzauer (Autriche)



Piste d'élan Callaghan valley

L'athlète dévale une longue rampe, que l'on appelle piste d'élan, qui lui permet de s'élancer dans les airs à des vitesses allant jusqu'à 95 km/h, avec un angle de départ de seulement 11° par rapport à l'horizontale. La technique est essentielle au saut à ski puisque les athlètes doivent effectuer un décollage précis et bien synchronisé. Lorsqu'ils sont dans les airs, les sauteurs prennent la position en V aérodynamique, puis ajustent leur position pour maximiser la portance et minimiser la traînée. Les concurrents sont jugés selon la distance, le style et l'atterrissage. La qualité de ce dernier peut être un facteur déterminant lorsqu'il s'agit de décider d'un rang, si les distances sont semblables.

Le record de distance est détenu par Bjørn Einar Romøren, qui sauta à 239 mètres sur le tremplin de Planica en Slovénie, le 20 mars 2005.

Le record de distance est détenu par Bjørn Einar Romøren, qui sauta à 239 mètres sur le tremplin de Planica en Slovénie, le 20 mars 2005.

1. Phase de lancement

Dans la phase de lancement, le skieur, dépourvu de bâtons, se laisse glisser le long de la piste d'élan. On ne s'intéresse qu'à la première section de la piste d'élan, parfaitement rectiligne, et pas à l'extrémité recourbée permettant le saut. La masse totale du skieur et de son équipement, skis inclus, sera notée m , telle que $m = 84$ kg.

Dans toute la suite du problème, on se place dans

le référentiel terrestre, supposé galiléen. Pour cette phase de lancement, on se placera dans un repère (Oxy) avec (Ox) colinéaire à la piste et dans le sens du mouvement, et (Oy) perpendiculaire à la piste, vers le haut.

La piste d'élan est inclinée d'un angle $\theta = 35^\circ$ par rapport à l'horizontale, pour une longueur maximale de la partie rectiligne de 140 mètres.

- 1.1. Effectuez le bilan des forces s'appliquant sur le système { skieur + skis }.
- 1.2. Appliquez la seconde loi de Newton, puis trouvez l'équation différentielle donnant la vitesse du skieur. On représentera les forces de frottement sur les skis par l'équation $f = kv^2$, et on négligera les frottements de l'air devant les frottements des skis sur la piste.

2. Vitesse en fin de piste d'élan

À l'aide d'une caméra à haute vitesse d'obturation, on filme le mouvement du skieur, et on relève ses positions à l'aide d'un logiciel de pointé. On a reproduit en annexe la représentation de la vitesse $v_x(t)$ du skieur le long de la piste d'élan.

- 2.1. Quelle(s) fonction(s) du logiciel de pointé faut-il utiliser pour tracer la courbe $v_x = v_x(t)$, une fois les pointés et donc les positions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ connues ?
- 2.2. Sur la courbe en annexe, déterminez la vitesse limite notée v_{lim} , en kilomètres par heure puis en mètres par seconde, atteinte par le skieur. Le tracé doit être apparent sur l'annexe.
- 2.3. Expliquez en termes simples pourquoi le skieur atteint une vitesse limite. En déduire une valeur numérique pour la constante k intervenant dans la force de frottement.

3. Résolution avec la méthode d'Euler

- 3.1. Montrez que l'équation différentielle trouvée précédemment peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} = av^2 + b$$

ou on donnera les expressions littérales et les unités des constantes a et b .

- 3.2. Une résolution par la méthode d'Euler, avec un pas $\Delta t = 0,2$ s, donne les résultats présentés en annexe. Complétez la ligne du tableau ayant été effacée, en justifiant très soigneusement.
- 3.3. Montrez que les résultats de la méthode d'Euler sont en accord avec la vitesse limite trouvée précédemment.

4. Comparaison avec la chute libre

Impressionné par la vitesse acquise par les skieurs en fin de piste d'élan, vous décidez de comparer avec la chute libre.

- 4.1. Calculez la hauteur totale de la piste d'élan (données à chercher dans le texte).
- 4.2. Dans l'hypothèse d'une chute libre verticale depuis une même hauteur que celle de la piste d'élan, trouvez les équations horaires du mouvement.
- 4.3. Déduire des équations précédentes, la durée d'une telle chute, ainsi que la vitesse en fin de chute, en mètres par seconde puis kilomètres par heure. Comparez cette vitesse avec la vitesse maximale du skieur en fin d'élan, et conclure.

5. Phase de vol

Pour simplifier la mise en équation, on va tout d'abord ignorer les forces de frottement fluide avec l'air, et donc ne considérer ni portance ni traînée.

- 5.1. On note \vec{v}_0 le vecteur vitesse initial, α l'angle de départ du saut par rapport à l'horizontal, et on se place dans un repère $(Oxyz)$ avec un axe

(Oy) vertical ascendant et un axe (Ox) horizontal, le point d'origine O étant pris à l'extrémité de la piste d'élan. Sans formule, indiquez dans quel plan a lieu le mouvement du skieur.

- 5.2. Établissez les équations horaires du mouvement du skieur, pour toute la phase de vol. Les équations seront données tout d'abord sous une forme littérale, puis sous une forme numérique. Donnée : $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.
- 5.3. Quelle est la forme de la trajectoire du skieur ? Que vaut sa vitesse verticale lorsqu'il atteint le sommet de sa trajectoire ?
- 5.4. Quel serait le dénivelé ou hauteur de chute du skieur, pour le record du monde de longueur de saut de 239 mètres ? On pourra résoudre ce problème de façon numérique, la démonstration littérale n'est pas exigée.
- 5.5. En théorie, quel doit être l'angle α de l'extrémité de la piste d'élan pour obtenir une portée maximale ? Expliquez pourquoi $\alpha = 11^\circ$ permet d'obtenir les meilleures portées dans le cas réel.

Exercice 2 – Lancement d'un satellite météorologique

Le centre spatial de Kourou a lancé le 21 décembre 2005, avec une fusée Ariane 5, un satellite de météorologie de seconde génération baptisé MSG-2. Tout comme ses prédécesseurs, il est placé sur une orbite géostationnaire à 36 000 km d'altitude. Opérationnel depuis juillet 2006, il porte maintenant le nom de Météosat 9.

Les satellites de seconde génération sont actuellement les plus performants au monde dans le domaine de l'imagerie météorologique. Ils assureront jusqu'en 2018 la fourniture de données météorologiques, climatiques et environnementales.

D'après plusieurs sites Internet.

L'objectif de cet exercice est d'étudier plusieurs étapes de la mise en orbite de ce satellite.

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

1. Décollage de la fusée Ariane 5

Pour ce lancement, la fusée Ariane 5 a une masse totale M . Sa propulsion est assurée par un ensemble de dispositifs fournissant une force de poussée verticale constante \vec{F} . Tout au long du décollage, on admet que la valeur du champ de pesanteur g est également constante. On étudie le mouvement du système {fusée} dans le référentiel terrestre supposé galiléen et on choisit un repère (O, \vec{j}) dans lequel \vec{j} est un vecteur unitaire vertical dirigé vers le haut et porté par l'axe (Oy) .

À l'instant $t_0 = 0 \text{ s}$, Ariane 5 est immobile et son centre d'inertie G est confondu avec l'origine O .

On utilise les notations suivantes pour la fusée :
 a valeur de l'accélération du centre d'inertie,

$$\vec{a} = a_y \vec{j}$$

v valeur de la vitesse de son centre d'inertie,

$$\vec{v} = v_y \vec{j}$$

y valeur de la position de son centre d'inertie,

$$\vec{OG} = y \vec{j}$$

Données :

Masse totale de la fusée $M = 7,3 \times 10^5 \text{ kg}$

Force de poussée $F = 1,16 \times 10^7 \text{ N}$

Intensité de pesanteur $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

On supposera que seuls le poids \vec{P} et la force de poussée \vec{F} agissent sur la fusée (on néglige toute action due à l'air). Pendant la durée de fonctionnement, on admettra que la masse de la fusée reste constante.

- 1.1. Sans faire de calcul, représenter ces forces sur un schéma pendant le décollage.
- 1.2. En appliquant une loi de Newton au système {fusée}, trouver l'expression littérale de la valeur a de l'accélération dès que la fusée a quitté le sol. Calculer la valeur de cette accélération a .
- 1.3. Pendant le lancement, on suppose que la valeur de l'accélération reste constante. Déterminer l'équation horaire de la valeur $v(t)$ de la vitesse.

1.4. En déduire l'équation horaire de la valeur $y(t)$ de la position.

1.5. La trajectoire ascensionnelle de la fusée reste verticale jusqu'à la date $t_1 = 6,0$ s.

Quelle distance la fusée a-t-elle parcourue depuis son décollage ?

2. Mise en orbite basse du satellite

Dans la suite de l'exercice, on suppose que la Terre est une sphère de centre T, de masse M_T , de rayon R_T et qu'elle présente une répartition de masse à symétrie sphérique. On assimile par ailleurs le satellite à son centre d'inertie S. L'étude de son mouvement se fait dans un référentiel géocentrique supposé galiléen.

Données :

Masse de la Terre : $M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg

Rayon de la Terre : $R_T = 6,4 \times 10^3$ km

Constante de gravitation universelle :

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

La mise en orbite complète du satellite MSG-2 de masse $m = 2,0 \times 10^3$ kg s'accomplit en deux étapes. Dans un premier temps, il est placé sur une orbite circulaire à vitesse constante v_S à basse altitude $h = 6,0 \times 10^2$ km autour de la Terre et il n'est soumis qu'à la force gravitationnelle exercée par la Terre.

On choisit un repère (S, \vec{t}, \vec{n}) dans lequel \vec{t} est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement et \vec{n} un vecteur unitaire perpendiculaire à la trajectoire orienté vers le centre de la Terre.

2.1. Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle \vec{F}_{TS} exercée par la Terre sur le satellite en fonction des données.

2.2. En appliquant une loi de Newton, trouver l'expression du vecteur accélération \vec{a}_S du centre d'inertie du satellite.

2.3. Sans souci d'échelle, représenter sur le schéma (figure 1 de l'annexe 2 à rendre avec la copie), à un instant de date t quelconque, la Terre, le satellite, le repère (S, \vec{t}, \vec{n}) ainsi que le vecteur accélération \vec{a}_S .

2.4. Déterminer l'expression de la vitesse v_S du centre d'inertie du satellite en fonction des données de l'énoncé.

Calculer sa valeur sur son orbite basse.

2.5. On note T le temps mis par le satellite pour faire un tour autour de la Terre. Comment appelle-t-on cette grandeur ?

Déterminer l'expression de T^2 en fonction de R_T , h , G et M_T .

Retrouver la 3^{ème} loi de Képler.

3. Transfert du satellite en géostationnaire

Une fois le satellite MSG-2 placé sur son orbite circulaire basse, on le fait passer sur une orbite géostationnaire à l'altitude $h' = 3,6 \times 10^4$ km. Ce transit s'opère sur une orbite de transfert qui est elliptique. Le schéma de principe est représenté sur la figure ci-dessous.

Le périhélie P est sur l'orbite circulaire basse et l'apogée A est sur l'orbite définitive géostationnaire. À un moment convenu, lorsque le satellite est au point P de son orbite circulaire basse, on augmente sa vitesse de façon bien précise : il décrit ainsi une orbite elliptique de transfert afin que l'apogée A de l'ellipse soit sur l'orbite géostationnaire définitive. On utilise pour cela un petit réacteur qui émet en P , pendant un très court instant, un jet de gaz donnant au satellite l'impulsion nécessaire.

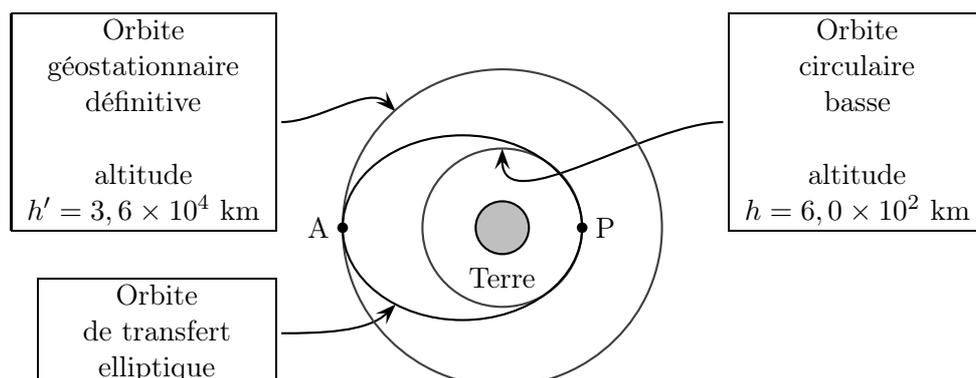
3.1. Énoncer la deuxième loi de Képler ou « loi des aires ».

3.2. Montrer, en s'aidant d'un schéma (figure 2 de l'annexe 2 à rendre avec la copie), que la vitesse du satellite MSG-2 n'est pas constante sur son orbite de transfert. Préciser en quels points (P ou A) de son orbite de transfert sa vitesse est :

- maximale ;
- minimale.

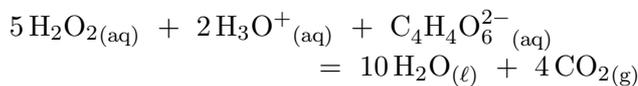
Le satellite étant arrivé au point A , on augmente à nouveau sa vitesse pour qu'il décrive ensuite son orbite géostationnaire définitive. Le lancement complet du satellite est alors achevé et le processus permettant de le rendre opérationnel peut débuter.

3.3. Donner trois conditions que doit satisfaire un satellite pour être géostationnaire.



Exercice 3 – Catalyse de l'oxydation des ions tartrate

L'eau oxygénée est un antiseptique c'est à dire une substance qui, par oxydation, prévient l'infection des tissus vivants en détruisant les micro-organismes. Elle contient des molécules d'eau oxygénée ou peroxyde d'hydrogène H_2O_2 , qui sont capables d'oxyder les ions tartrate, de formule chimique $\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6^{2-}$. L'équation chimique modélisant la réaction chimique qui a lieu entre ces deux entités chimiques est :



Dans tout l'exercice, elle sera considérée comme totale. Afin de réaliser la transformation chimique correspondante, on mélange une solution d'eau oxygénée de concentration c_1 , de volume V_1 , avec une solution de sel de Seignette contenant les ions tartrate de concentration c_2 et de volume V_2 , à la température de 20°C . Le mélange réactionnel est ensuite légèrement acidifié. On supposera que la transformation chimique a lieu à volume constant. La durée de cette transformation chimique est de l'ordre de plusieurs semaines.

1. Étude cinétique de la transformation

1.1. Tableau descriptif de l'évolution du système

1.1.a. Un élève a obtenu le tableau descriptif d'évolution du système chimique, tel que reproduit en annexe, avec $n_1 < 5n_2$. Des erreurs se sont glissées dans ce tableau. Quelles sont-elles ?

1.1.b. Pourquoi le milieu doit être légèrement acidifié ?

1.1.c. Donner l'allure de la courbe représentant la concentration en eau oxygénée en fonction du temps. Justifier votre choix.

1.2. Étude de la vitesse volumique de réaction

1.2.a. Définir la vitesse volumique v de la réaction en fonction de l'avancement x .

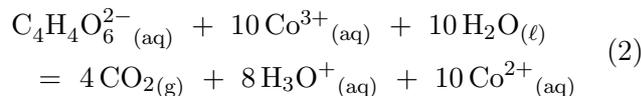
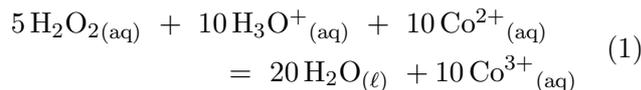
1.2.b. Montrer que l'expression de cette vitesse volumique v , en fonction de la concentration en eau oxygénée $[\text{H}_2\text{O}_2]$, est :

$$v = -\frac{1}{5} \frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{dt}$$

1.2.c. Comment cette vitesse évolue-t-elle au cours du temps ? Justifier graphiquement sans calcul. Pourquoi subit-elle une telle évolution ?

2. Catalyse homogène

La réaction chimique précédente est très lente. Pour pouvoir réaliser l'oxydation des ions tartrate par l'eau oxygénée de façon instantanée, on peut la catalyser par les ions cobalt (II) Co^{2+} qui donnent une couleur rosé aux solutions. Ce catalyseur permet aux réactifs (molécule d'eau oxygénée et ion tartrate) de parvenir aux produits par un chemin énergétiquement moins exigeant. Ce chemin peut être modélisé par deux réactions chimiques rapides :



En fait les ions cobalt (II) et cobalt (III) agissent sous forme d'un complexe tartrique non représenté ici. Les ions cobalt (III) donnent une couleur verte aux solutions.

Le mélange réactionnel étudié comporte 60 mL d'une solution de sel de Seignette (contenant les ions tartrate) à $0,2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, 10 mL d'une solution d'eau oxygénée à $11 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et 5,0 mL d'une solution de chlorure de cobalt (II) à $0,15 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

L'évolution temporelle de la concentration en ions cobalt (III) $\text{Co}^{3+}_{(\text{aq})}$ présents dans le mélange réactionnel précédent est représentée sur la courbe en fin de sujet.

2.1. Étude de la courbe

2.1.a. Quelle est la méthode physique la plus adaptée pour le suivi temporel de la concentration en ions cobalt (III) présents dans le mélange réactionnel ? Justifier.

2.1.b. Dans les zones 2 et 4, le mélange réactionnel a une couleur verdâtre. Quelle est la couleur du mélange réactionnel dans les zones 1, 3 et 5 ? Justifier.

2.1.c. Parmi les réactions chimiques proposées (1) et (2), quelle est celle qui a lieu dans la zone 2 ? Dans la zone 3 ? Dans la zone 4 ? Justifier vos choix.

2.2. Vitesse de réaction

Exposer succinctement la méthode permettant de déterminer la vitesse volumique de réaction v , à un instant t_3 ($t_3 > t_2$) à partir de la courbe, sachant que :

$$v = -\frac{1}{10} \frac{d[\text{Co}^{3+}]}{dt}$$

(la valeur de v n'est pas demandée).

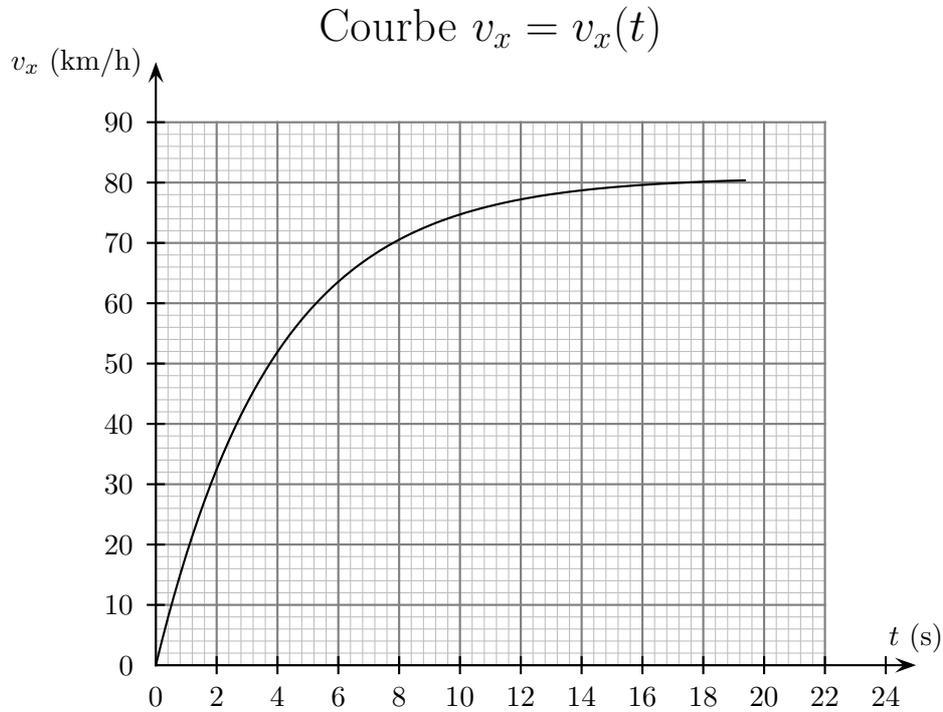
2.3. Rôle du catalyseur

2.3.a. Une des propriétés du catalyseur est qu'il ne doit pas figurer dans l'équation chimique de la réaction d'oxydation des ions tartrate par l'eau oxygénée. Comment la courbe met-elle en évidence cette propriété ?

2.3.b. La quantité de matière finale de dioxyde de carbone obtenu est-elle plus grande, plus petite, inchangée avec la présence du catalyseur ? Justifier.

2.3.c. Pourquoi peut-on parler de catalyse homogène ?

Annexes de l'exercice 1



Résultats partiels de la méthode d'Euler

	A	B	C	D	E	F
1	Δt (s)	a	b	t (s)	v (m/s)	v (km/h)
2	0,2	-0,25	5,62	0	0,000	0
3				0,2	1,124	4,05
4				0,4	2,192	7,89
5				0,6	3,207	11,54
6				0,8	4,171	15,01
7						
8				1,2	5,956	21,44
9				1,4	6,783	24,42
10				1,6	7,568	27,24
11				1,8	8,314	29,93
12				2	9,022	32,48
13				2,2	9,695	34,9

Annexes de l'exercice 2

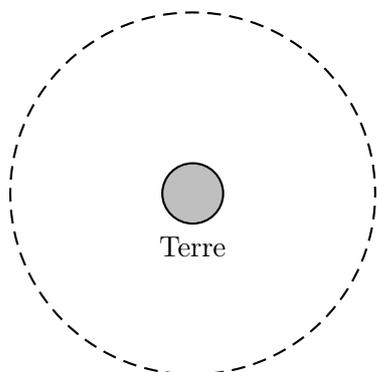


Figure 1

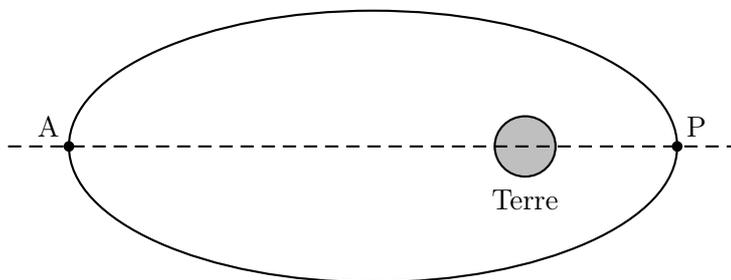


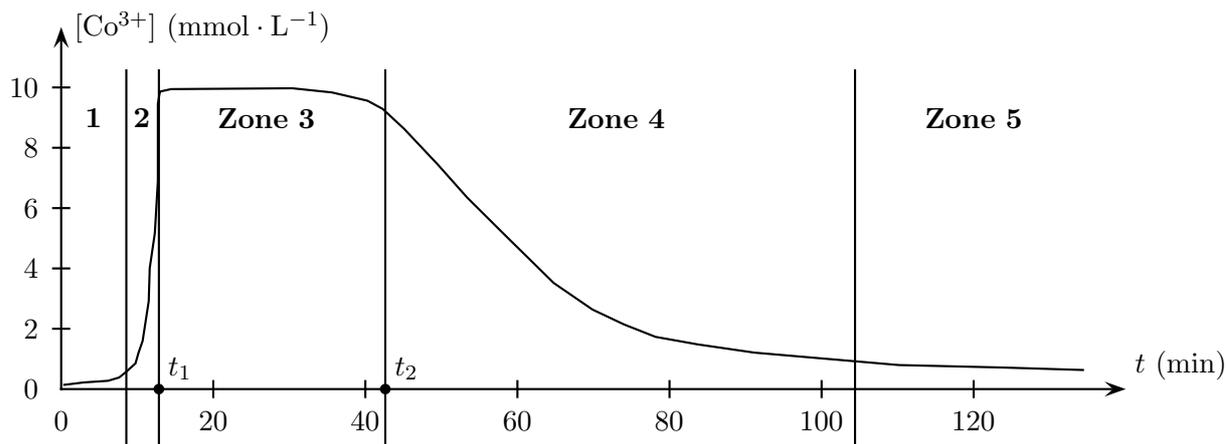
Figure 2

Annexes de l'exercice 3

Tableau descriptif d'évolution du système chimique

Équation		$5 \text{H}_2\text{O}_2(\text{aq}) + 2 \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}) + \text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6^{2-}(\text{aq}) = 10 \text{H}_2\text{O}(\ell) + 4 \text{CO}_2(\text{g})$				
	Avance ^{mt}	Quantités de matière (mol)				
EI	0	n_1	n_2	Excés	Excés	0
Ec	x	$n_1 - x$	$n_2 - x$	Excés	Excés	$4x$
EF	$x_{\text{max}} = n_1$	0	$n_2 - n_1$	Excés	Excés	$4n_1$

Courbe de concentration des ions cobalt (III)



Exercice 1 – Le saut à ski

1.1. Forces sur le système { skieur + skis } :

- Poids \vec{P} :
 - direction : verticale ;
 - sens : vers le bas ;
 - point d'application : centre d'inertie G ;
 - valeur : $P = mg$.
- Réaction normale du support \vec{N} :
 - direction : perpendiculaire à la piste ;
 - sens : vers le haut ;
 - pt. d'app. : centre de la surface de contact ;
 - valeur : N .
- Force de frottement \vec{f} :
 - direction : tangente au mouvement ;
 - sens : opposé au mouvement ;
 - pt. d'app. : centre de la surface de contact ;
 - valeur : $f = kv^2$.

On néglige la poussée d'Archimède (très faible comparé au poids du skieur) et les frottements de l'air (faibles comparés aux frottements des skis sur la neige).

1.2. Deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = m \vec{a}$$

Projection sur les axes (Ox) tangent à la piste, oblique vers le bas, et (Oy), perpendiculaire à la piste, oblique vers le haut :

$$\begin{cases} mg \sin \theta + 0 - kv^2 = ma_x \\ -mg \cos \theta + N + 0 = ma_y \end{cases}$$

Le skieur ne s'enfonce pas dans la piste, qui est rectiligne, donc $a_y = 0$; reste la projection selon (Ox), avec $a_x = a$:

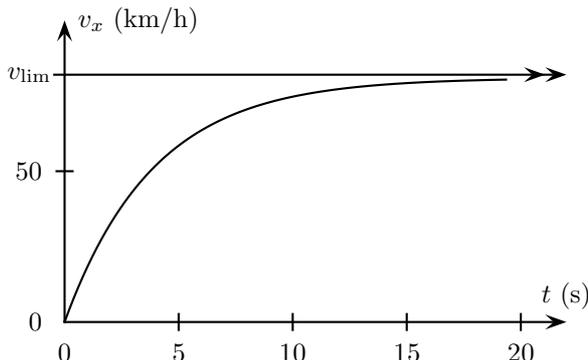
$$ma = m \frac{dv}{dt} = mg \sin \theta - kv^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g \sin \theta - \frac{k}{m} v^2$$

Cette équation n'est pas intégrable. Elle est différente du cas de la chute freinée, par la présence de $\sin \theta$, du fait du mouvement sur un plan incliné.

2.1. Il faut utiliser la fonction « dérivée ».

2.2. Tracé de l'asymptote horizontale :



Lecture graphique : $v_{\text{lim}} = 82 \text{ km/h} = 23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- 2.3.** Lorsque le skieur a atteint sa vitesse limite, les forces de frottement sont telles qu'elles compensent l'action du poids : le skieur est soumis à des forces qui se compensent :

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = \vec{0}$$

D'après la première loi de Newton (ou Principe d'inertie), le système a alors un mouvement rectiligne uniforme. Conséquence :

$$v = v_{\text{lim}} = \text{cte} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

On reporte dans l'équation différentielle :

$$0 = g \sin \theta - \frac{k}{m} v_{\text{lim}}^2 \Leftrightarrow k = \frac{mg \sin \theta}{v_{\text{lim}}^2}$$

Application numérique :

$$k = \frac{84 \times 9,81 \times \sin 35^\circ}{23^2} = 0,893 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

Analyse dimensionnelle pour l'unité de k :

$$[k] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

- 3.1.** L'équation différentielle peut se mettre sous la forme indiquée, à condition de poser :

$$a = -\frac{k}{m} \quad \text{et} \quad a = g \sin \theta$$

Analyse dimensionnelle pour les constantes a et b :

$$\begin{cases} [a] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} = \text{m}^{-1} \\ [b] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \end{cases}$$

- 3.2.** Le tableau présenté propose les valeurs suivantes, pour le pas n°5 :

$$t_5 = 0,8 \text{ s} \quad ; \quad v_5 = 4,171 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On cherche à compléter la ligne vide, pour le pas n°6. L'équation différentielle s'approxime en :

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_6 - v_5}{t_6 - t_5} = av_5^2 + b$$

$$\Rightarrow v_6 = v_5 + (av_5^2 + b)(t_6 - t_5)$$

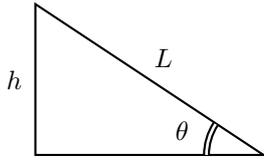
Avec un pas de calcul $\Delta t = 0,2 \text{ s}$, on trouve $t_6 = t_5 + \Delta t = 0,8 + 0,2 = 1,0 \text{ s}$. Les valeurs de a et b sont indiquées dans le tableau :

$$v_6 = 4,171 + (-0,25 \times 4,171^2 + 5,62) \times 0,2$$

$$v_6 = 4,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 3.3.** Le tableau n'est pas assez complet pour conclure sur l'existence d'une vitesse limite (sans doute une erreur d'énoncé).

- 4.1.** L'énoncé indique une piste d'élan de longueur $L = 140$ m, inclinée d'un angle $\theta = 35^\circ$ par rapport à l'horizontale. La longueur L est l'hypothénuse et la hauteur h le côté opposé d'un triangle rectangle :



$$\sin \theta = \frac{h}{L} \Leftrightarrow h = L \sin \theta$$

$$h = 140 \sin 35^\circ = 80 \text{ m}$$

- 4.2.** L'absence de piste supprime toute réaction du support, et on persiste à négliger les frottements de l'air et la poussée d'Archimède. Le skieur et ses skis est donc uniquement soumis à son poids :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = m \vec{a}$$

Projection sur un axe (Ox) vertical vers le bas :

$$mg = ma_x$$

$$a_x(t) = g$$

On intègre : $v_x(t) = gt + v_{0x}$, la constante d'intégration v_{0x} est nulle si on considère que le skieur est immobile au déclenchement de la chute :

$$v_x(t) = gt$$

On intègre une seconde fois : $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + x_0$, la constante d'intégration x_0 est nulle si on considère que le skieur débute sa chute à l'origine O du repère :

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

- 4.3.** Durée de la chute $x(t) = h$:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 80}{9,8}} = 4,0 \text{ s}$$

Vitesse en fin de chute :

$$v(t) = gt$$

$$v(t) = 9,81 \times 4,0 = 39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v(t) = 1,4 \times 10^2 \text{ km/h}$$

Conclusion : la chute est plus rapide, et la vitesse atteinte en fin de chute est bien plus importante.

- 5.1.** Le mouvement du skieur a lieu dans le plan (xOy). En effet, d'une part, son vecteur vitesse initial \vec{v}_0 est dans ce plan ; et d'autre part, le skieur n'est soumis qu'à son poids, vertical, colinéaire à l'axe (Oy), donc on constate qu'aucune force n'est apte à changer le plan du mouvement.

- 5.2.** On part avec les mêmes hypothèses que pour la chute verticale :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = m \vec{a}$$

Les projections diffèrent :

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}$$

On intègre une première fois :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} \\ v_y(t) = -gt + v_{y0} \end{cases}$$

Les constantes d'intégration, composantes du vecteur vitesse initial \vec{v}_0 , sont faciles à exprimer :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

On intègre une seconde fois :

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha)t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + y_0 \end{cases}$$

Les deux constantes d'intégration sont nulles, l'origine O du repère étant prise à l'extrémité de la piste d'élan :

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \end{cases}$$

Sous forme numérique, le skieur a acquis en bout de rampe la vitesse limite $v_0 = 23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et débute son saut avec l'angle $\alpha = 11^\circ$:

$$\begin{cases} x(t) = (23 \times \cos 11^\circ) \times t \\ y(t) = -\frac{9,81}{2} \times t^2 + (23 \times \sin 11^\circ) \times t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 23t \\ y(t) = -4,91t^2 + 4,4t \end{cases}$$

- 5.3.** La trajectoire est une parabole. La composante verticale de la vitesse v_y est nulle lorsque le skieur atteint le sommet de la trajectoire.

- 5.4.** Le record de longueur est donc :

$$L = 239 \text{ m} = x(t) = 23t \Rightarrow t = \frac{239}{23} = 10 \text{ s}$$

Le dénivelé D vaut alors :

$$D = y(t)$$

$$D = -4,91 \times 10^2 + 4,4 \times 10$$

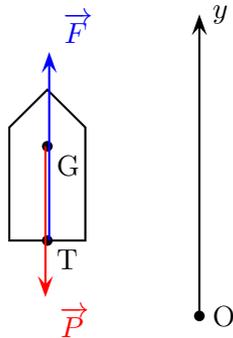
$$D = -4,5 \times 10^2 \text{ m}$$

Cette valeur très forte montre que l'on ne peut pas négliger les forces de frottement de l'air. Ceci valide l'importance de la position aérodynamique et par là-même le style peu orthodoxe de M. Boklöv dont il est question dans l'énoncé.

- 5.5.** En théorie, l'angle $\alpha = 45^\circ$ permet d'obtenir une portée maximale. En pratique, les forces de trainée (frottements) et de portance (force vers le haut permettant de planer) n'étant pas négligeables, un angle plus faible permet un saut plus long.

Exercice 2 – Lancement d'un satellite météorologique

- 1.1.** Les deux forces, le poids \vec{P} et la force de poussée \vec{F} , sont colinéaires et de sens opposés; on note T le centre des tuyères des réacteurs, point d'application de la poussée \vec{F} . Artificiellement, on décale très légèrement l'un des deux vecteurs pour mieux voir l'autre :



- 1.2.** Deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{F} = m \vec{a}_G$$

Projection sur l'axe (Oy) dirigé vers le haut :

$$-mg + F = ma_y \Leftrightarrow a_y = \frac{F}{m} - g$$

La fusée n'a pas d'accélération selon les deux autres axes (Ox) et (Oz).

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |a_y| = \left| \frac{F}{m} - g \right|$$

De plus, afin d'assurer une accélération de la fusée vers le haut, $F > mg$ et donc $a_y > 0$:

$$a = \frac{F}{m} - g$$

Application numérique :

$$a = \frac{1,16 \times 10^7}{7,3 \times 10^5} - 10 = 5,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

- 1.3.** On intègre l'équation différentielle précédente :

$$v(t) = \left(\frac{F}{m} - g \right) t + v_0 = at + v_0$$

La condition initiale $v(t=0) = 0$ (Ariane 5 immobile) permet de déterminer la valeur de la constante d'intégration $v_0 = 0$:

$$v(t) = at$$

- 1.4.** On intègre une deuxième fois :

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 + y_0$$

La condition initiale $y(t=0) = 0$ (G confondu avec l'origine O) permet de déterminer la valeur de la constante d'intégration $y_0 = 0$:

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2$$

- 1.5.** Distance parcourue au temps $t_1 = 6,0 \text{ s}$:

$$y(t_1) = \frac{1}{2} \times 5,9 \times (6,0)^2 = 1,1 \times 10^2 \text{ m}$$

- 2.1.** Force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite, appliquée au centre S du satellite, dirigée de S vers T :

$$\vec{F}_{\text{TS}} = G \frac{M_{\text{T}}m}{(R_{\text{T}} + h)^2} \vec{n}$$

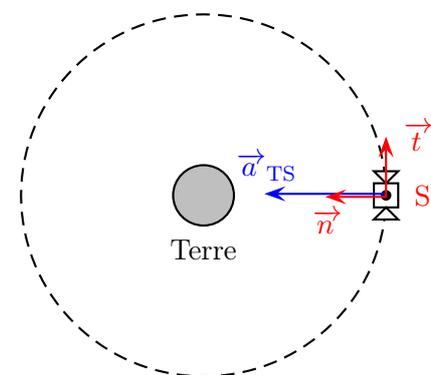
- 2.2.** Le satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle due à la Terre. La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_S \Rightarrow \vec{F}_{\text{TS}} = m \vec{a}_S$$

$$\Leftrightarrow m \vec{a}_S = G \frac{M_{\text{T}}m}{(R_{\text{T}} + h)^2} \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}_S = G \frac{M_{\text{T}}}{(R_{\text{T}} + h)^2} \vec{n}$$

- 2.3.** Figure 1 de l'annexe :



- 2.4.** Le satellite est en mouvement circulaire uniforme. La valeur de l'accélération centripète a_S du satellite est liée à la valeur de sa vitesse v_S par la relation :

$$a_S = \frac{v_S^2}{R_{\text{T}} + h} \Leftrightarrow v_S = \sqrt{a_S (R_{\text{T}} + h)}$$

On remplace par l'expression précédente de l'accélération :

$$a_S = G \frac{M_{\text{T}}}{(R_{\text{T}} + h)^2} \Rightarrow v_S = \sqrt{\frac{GM_{\text{T}}}{R_{\text{T}} + h}}$$

Application numérique :

$$v_S = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{24}}{(6,4 \times 10^3 + 6,0 \times 10^2) \times 10^3}}$$

$$v_S = 7,6 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.5. T est la période du satellite, ou durée d'une révolution. Une révolution, de longueur $2\pi(R_T + h)$, est parcourue dans le temps T à la vitesse v_S constante, donc :

$$v_S = \frac{2\pi(R_T + h)}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v_S}$$

On remplace v_S par son expression :

$$T = 2\pi(R_T + h) \sqrt{\frac{R_T + h}{GM_T}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$

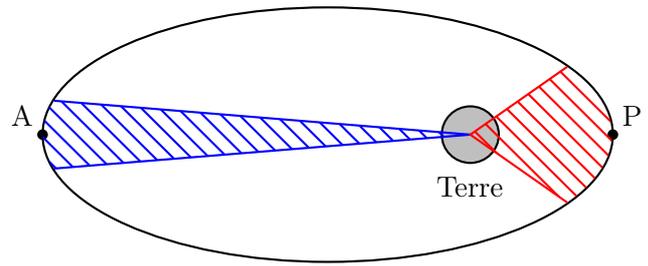
On élève les deux membres au carré :

$$\Rightarrow \frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

C'est la troisième loi de Képler : le carré de la période divisé par le cube du rayon de l'orbite est égal à une constante.

3.1. Deuxième loi de Képler : le rayon vecteur \vec{TS} reliant le centre de l'astre attracteur (ici, la Terre) au centre du satellite balaye des aires égales pendant des durées égales.

3.2. L'orbite de transfert est *elliptique* ; le point A est l'aphélie, point le plus éloigné du centre attracteur, le point P est le périhélie, point le plus proche du centre attracteur. Si on veut que le rayon vecteur \vec{TS} balaye des aires égales pendant des durées égales, il faut que le déplacement soit plus rapide en P qu'en A :



Ainsi, la vitesse est maximale au point P, et minimale au point A.

3.3. Un satellite géostationnaire doit :

- avoir la même période de révolution que la Terre, soit un jour *sidéral*, $T = 86\,164 \text{ s} \simeq 24 \text{ h}$;
- tourner d'Est en Ouest ;
- se trouver dans le plan de l'équateur.

Si ces conditions sont réunies, le satellite apparaîtra immobile par rapport au sol.

Exercice 3 – Catalyse de l'oxydation des ions tartrate

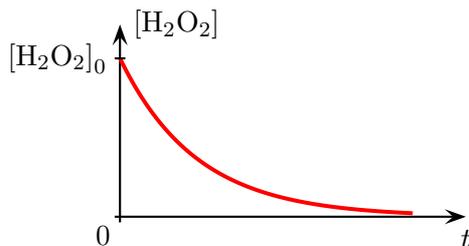
1.1.a. Le tableau correct est reproduit en fin de corrigé. Recherche du réactif limitant :

$$\begin{cases} n_1 - 5x_{\max} = 0 \\ n_2 - x_{\max} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{\max} = \frac{n_1}{5} \\ x_{\max} = n_2 \end{cases}$$

L'énoncé précise que $n_1 < 5n_2$ donc $\frac{n_1}{5} < n_2$: le réactif limitant est l'eau oxygénée $\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}$. La quantité restante d'ions tartrate $\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6^{2-}(\text{aq})$ à l'état final est $n_2 - x_{\max} = n_2 - \frac{n_1}{5}$.

1.1.b. Le milieu doit être acidifié car la réaction consomme des ions oxonium $\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$.

1.1.c. La concentration en eau oxygénée va décroître exponentiellement :



En effet, l'eau oxygénée est le réactif (= consommé) d'une réaction lente.

1.2.a. Vitesse volumique de réaction :

$$v = \frac{1}{V} \frac{dx}{dt}$$

1.2.b. À un instant quelconque, d'après le tableau descriptif de la réaction :

$$n_{\text{H}_2\text{O}_2} = n_1 - 5x \Leftrightarrow x = \frac{n_1 - n_{\text{H}_2\text{O}_2}}{5}$$

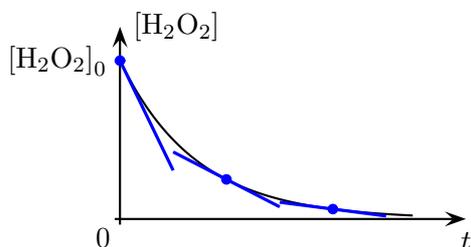
On remplace dans l'expression de la vitesse volumique :

$$v = -\frac{1}{5V} \frac{dn_{\text{H}_2\text{O}_2}}{dt}$$

On peut faire passer la constante $\frac{1}{V}$ dans la dérivée, pour faire apparaître la concentration en eau oxygénée :

$$v = -\frac{1}{5} \frac{d\frac{n_{\text{H}_2\text{O}_2}}{V}}{dt} = -\frac{1}{5} \frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{dt} \quad \text{c. q. f. d.}$$

1.2.c. La vitesse est proportionnelle à la pente des tangentes à la courbe $x = f(t)$ proposée à la réponse **1.1.c.** La pente de ces tangentes est maximale au début, puis décroît progressivement jusqu'à s'annuler :



La diminution de la vitesse de réaction est due au facteur cinétique concentration : les réactifs disparaissent, leurs concentrations diminuent, et donc la vitesse volumique de réaction aussi.

2.1.a. Les ions cobalt (III) $\text{Co}^{3+}_{(\text{aq})}$ étant colorés en solution aqueuse (coloration verte du complexe tartrique, différente de la coloration rose des ions cobalt (II) $\text{Co}^{2+}_{(\text{aq})}$), on peut suivre la transformation par spectrophotométrie.

Pour cela, il faut au préalable d'une part enregistrer le spectre des ions cobalt (III) afin de repérer un pic d'absorbance exclusive, à une longueur d'onde λ_{max} à laquelle on va effectuer les mesures, et d'autre part établir une courbe d'étalonnage si on veut des mesures quantitatives.

2.1.b. Dans les zones 1 et 5, la concentration en ions cobalt (III) est très faible, donc tous les ions cobalt sont sous forme d'ions (II), et la solution a la coloration rose de ces ions dans l'eau (toutes les autres espèces sont incolores dans l'eau).

Dans la zone 3, la concentration en ions cobalt (III) est plus forte que dans la zone 4, zone dans laquelle la coloration verdâtre est toujours perceptible ; par suite, dans cette zone 3, la solution a une coloration verte. Dans la zone 4, la coloration est en réalité vert olive, couleur obtenue en mélangeant le vert et le rose :

tion est en réalité vert olive, couleur obtenue en mélangeant le vert et le rose :

<http://www.wolframalpha.com>

`/input/?i=pink\%Bgreen`

2.2. Il suffit de tracer une tangente à la courbe en t_3 , et de déterminer la pente p de cette tangente, qui s'interprète comme la dérivée :

$$p \simeq \frac{d[\text{Co}^{3+}]}{dt} \Rightarrow v = -\frac{1}{10}p$$

La formule indique qu'il faut ensuite diviser par dix (qui est le coefficient stœchiométrique devant l'ion cobalt (III) considéré, avec un signe moins car il s'agit de sa disparition, en tant que réactif de la réaction (2)).

2.3.a. La courbe part d'une contraction nulle en cobalt (III), pour aboutir à $t \rightarrow \infty$ à une concentration nulle. Le catalyseur, l'ion cobalt (II), est donc bien consommé (transformé en ion cobalt (III)) puis totalement régénéré en fin de réaction.

2.3.b. Les quantités de réactifs et de produits, et donc de dioxyde de carbone, sont inchangées en fin de réaction : un catalyseur ne modifie pas l'état final, il permet juste de l'atteindre plus rapidement.

2.3.c. Le catalyseur est en solution aqueuse, comme toutes les autres espèces. Il est donc dans la même phase que les réactifs et produits, y inclus le dioxyde de carbone qui est tout d'abord en solution aqueuse, dissout (et éventuellement, dans un second temps, sous forme de gaz lorsque la solution aqueuse est saturée en gaz dissout). Il s'agit donc bien d'une catalyse homogène.

Équation		$5 \text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})} + 2 \text{H}_3\text{O}^+_{(\text{aq})} + \text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6^{2-}_{(\text{aq})} = 10 \text{H}_2\text{O}_{(\ell)} + 4 \text{CO}_{2(\text{g})}$			
	Avance ^{mt}	Quantités de matière (mol)			
EI	0	n_1	Excés	n_2	Excés 0
Ec	x	$n_1 - 5x$	Excés	$n_2 - x$	Excés $4x$
EF	$x_{\text{max}} = \frac{n_1}{5}$	0	Excés	$n_2 - \frac{n_1}{5}$	Excés $\frac{4n_1}{5}$

Exo 1 – Le saut à ski

.../34

- Bilan + 4C
- Schéma avec \vec{R}_N bien \perp à \vec{f}
- $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$
- $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m \vec{a}$
- Projection $P \sin \alpha + 0 - f = ma_x$
- Projection $-P \cos \alpha + R_N + 0 = ma_y$
- Équa diff $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g \sin \alpha$
- Dérivée
- Courbe : asymptote horizontale
- $v_{\text{lim}} = 82 \text{ km/h}$
- $v_{\text{lim}} = 23 \text{ m/s}$
- Vitesse limite car $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$
- $\frac{dv_{\text{lim}}}{dt} = 0 \Rightarrow k = mg \sin \alpha / v_{\text{lim}}^2$
- A.N. $k = 0,89$ unités S.I.
- $a = -k/m$ et $b = g \sin \alpha$
- $[b] = \text{m.s}^{-2}$ et $[a] = \text{m}^{-1}$
- Euler : $v_{i+1} = v_i + (av_i^2 + b) \Delta t$ ou équivalent
- Ligne : $t = 1,0 \text{ s}$, car pas de $0,2 \text{ s}$
- Ligne : $v = 5,086 \text{ m/s}$ et $18,31 \text{ km/h}$, calculés
- $h = L \sin \alpha = 80 \text{ m}$
- $y = -\frac{1}{2}gt^2$ ou équivalent
- Durée $t = \sqrt{2h/g} = 4,0 \text{ s}$
- Vitesse $v = gt = 39 \text{ m/s} = 140 \text{ km/h}$
- Bien supérieure à v_{lim} car frottements
- Plan (Oxy)
- $a_x = 0, a_y = -g$
- $v_x = v_0 \cos \alpha$ et $v_y = -gt + v_0 \sin \alpha$
- $x = (v_0 \cos \alpha)t$ et $y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t$
- $x = 25,5t$ et $y = -4,9t^2 + 5,0t$
- Parabole
- Vitesse verticale nulle
- $x = 239 \text{ m} \Rightarrow t = 9,37 \text{ s} \Rightarrow y = -384 \text{ m}$

Exo 2 – Lancement d'un satellite

.../18

- Schéma 2 forces
- 2^{ème} loi appliquée, $a = F/M - f$
- $a = 6,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- $v = at$ démontrée
- $y = \frac{1}{2}at^2$
- $y = 1,1 \times 10^2 \text{ m}$
- Force de frottement
- $\vec{F}_{T/S} = GM_T m / (R_{T+h})^2 \vec{n}$
- 2^{ème} loi + $\vec{F}_{T/S} = m \vec{a}_S$
- $\vec{a}_S = GM_T / (R_{T+h})^2 \vec{n}$
- Schéma accélération centripète
- $a_S = v_S^2 / (R_{T+h})^2$
- $v_S = \sqrt{GM_T / R_{T+h}}$, démontrée
- $v_S = 7,6 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- 3^{ème} loi de Képler, démontrée
- 2^{ème} loi de Képler, énoncée
- Vitesse max en P, min en A
- 3 conditions géostationnaire

Exo 3 – Catalyse

.../16

- Erreur $n_1 - 5x_f$
- Erreurs $n_2 - n_1/5$ et $4n_1/5$
- H_3O^+ réactif
- Exponentielle décroissante, justifié
- $v = \frac{1}{V} \frac{dx}{dt}$
- Expression $x = (n_1 - [\text{H}_2\text{O}_2]V)/5$
- Dérivée de x explicite
- $t \nearrow \Rightarrow v \searrow$
- Pente tangentes + Facteur cinétique concentration
- Spectrophotométrie, choix expliqué
- 1 et 5 rose, 3 vert, justifiées
- $2 \leftrightarrow R_1, 3 \leftrightarrow R_1 + R_2, 4 \leftrightarrow R_2$, justifiés
- Pente tangente, divisé par dix, chang^{mt} signe
- Oui, régénération des ions $\text{Co}^{2+}_{(\text{aq})}$
- Quantités finales inchangées, justifié
- Explication catalyse homogène

Total
Note

.../68
.../20