

## Exercice I – Principe de fonctionnement d'une minuterie

L'objet de cet exercice est d'étudier le principe de fonctionnement d'une minuterie permettant d'éteindre une lampe automatiquement au bout d'une durée  $t_0$  réglable.

Le montage du circuit électrique, représenté sur le document 1 de l'annexe 1 à rendre avec la copie, est constitué :

- d'un générateur idéal de tension, de force électromotrice  $E = 30 \text{ V}$  ;
- d'un interrupteur  $K$  ;
- d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  ;
- d'un condensateur de capacité  $C$  ;
- d'un bouton poussoir  $P$  qui joue le rôle d'un interrupteur : il est fermé seulement quand on appuie dessus ;
- d'un composant électronique  $M$  qui permet l'allumage de la lampe  $L$  tant que la tension aux bornes du condensateur est inférieure à une tension limite, caractéristique du composant, notée  $U_\ell$  (dans tout l'exercice on fixera  $U_\ell$  à une valeur constante égale à  $20 \text{ V}$ ).

Le composant électronique  $M$  possède une alimentation électrique propre (non représentée sur le schéma) qui lui fournit l'énergie nécessaire à l'allumage de la lampe. De ce fait, on admettra que le composant électronique  $M$  ne perturbe pas le fonctionnement du circuit  $RC$ , c'est-à-dire que la tension aux bornes du condensateur est identique que  $M$  soit présent ou non dans le circuit.

### 1. Étude du circuit $RC$

À l'instant initial ( $t = 0 \text{ s}$ ), le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur  $K$ , le bouton poussoir est relâché (voir schéma du document 1 de l'annexe 1).

- 1.1. On souhaite visualiser les variations de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur en fonction du temps à l'aide d'un oscilloscope à mémoire. Indiquer les branchements à réaliser (voie 1 et masse) sur le schéma du document 1 de l'annexe 1 à rendre avec la copie.
- 1.2. Montrer que l'équation différentielle donnant les variations de la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur en fonction du temps est de la forme :

$$u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} = E$$

- 1.3. a. En vérifiant que la fonction du temps :

$$u_C(t) = A \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

est solution de l'équation différentielle précédente, montrer que  $A = E$  et que  $\tau = RC$ .

- b. Quelle est la valeur de  $u_C$  en régime permanent ?
- c. Quel est le nom donné à la constante  $\tau$  ?  
À l'aide d'une analyse dimensionnelle, donner l'unité de  $\tau$ .

- 1.4. La représentation graphique de la fonction  $u_C(t)$  est donnée dans le document 2 de l'annexe 1, à rendre avec la copie. Faire apparaître sur ce graphe, sans aucune justification :

- la tension  $E$  ;
- la constante  $\tau$  ;
- les régimes permanent et transitoire.

- 1.5. Calculer la valeur de la constante  $\tau$  pour  $R = 100 \text{ k}\Omega$  et  $C = 200 \text{ }\mu\text{F}$ .

- 1.6. a. Donner l'expression littérale de la date  $t_0$  à laquelle la tension aux bornes du condensateur atteint la valeur limite  $U_\ell$  en fonction de  $U_\ell$ ,  $E$  et  $\tau$  ( $t_0$  étant la durée d'allumage de la lampe).

- b. Calculer la valeur de  $t_0$  et vérifier la validité du résultat à l'aide du graphe  $u_C(t)$  fourni dans le document 2 de l'annexe 1 à rendre avec la copie.

- c. On a fixé  $U_\ell$  à  $20 \text{ V}$  pour obtenir une durée d'allumage  $t_0$  voisine de  $\tau$ . Pour quelle raison choisir  $t_0$  très supérieur à  $\tau$  n'aurait pas été judicieux pour un tel montage ?

- 1.7. Quel(s) paramètre(s) du montage peut-on modifier sans changer le générateur afin d'augmenter la durée d'allumage de la lampe ? En fixant  $C = 200 \text{ }\mu\text{F}$ , quelle valeur doit-on donner à la résistance  $R$  pour obtenir  $\tau = 1 \text{ min}$  ?

- 1.8. On appuie sur le bouton poussoir. Que vaut la tension aux bornes du condensateur ? La comparer à  $U_\ell$ . Que se passe-t-il pour la lampe dans les cas suivants :

- a. la lampe est déjà allumée ?
- b. la lampe est éteinte ?

### 2. Méthode d'Euler (partie facultative)

On se propose maintenant de résoudre numériquement l'équation différentielle établie à la question I.2,  $R$  et  $C$  conservant les valeurs  $R = 100 \text{ k}\Omega$  et  $C = 200 \text{ }\mu\text{F}$ .

- 2.1. À partir de l'équation différentielle, donner la relation entre la dérivée  $\frac{du_C(t)}{dt}$  et la tension  $u_C(t)$ .

La méthode d'Euler permet de calculer successivement les valeurs de  $u_C(t)$  et de  $\frac{du_C(t)}{dt}$  à intervalle de temps régulier  $\Delta t$ , appelé le pas. En prenant un pas suffisamment petit, on peut écrire la relation :

$$u_C(t + \Delta t) = u_C(t) + \frac{du_C(t)}{dt} \cdot \Delta t$$

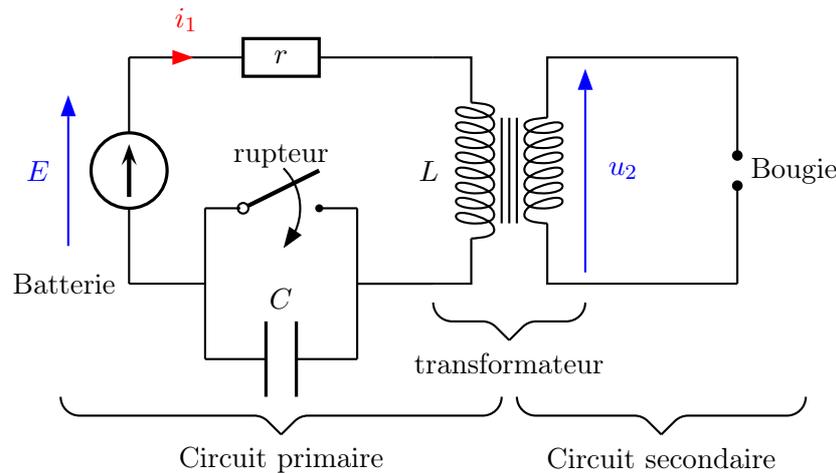
Pour cette étude, on prend un pas égal à  $\Delta t = 2$  s.

- 2.2. En utilisant l'expression littérale ci-dessus, compléter dans le tableau donné en annexe (document 3, annexe 1) les colonnes correspondant aux dates

$t = 2$  s et  $t = 4$  s.

- 2.3. Le document 4 de l'annexe 2 représente un agrandissement de la courbe  $u_C(t)$  du document 2. Tracer sur ce document à rendre avec la copie, la partie du graphe  $u_C(t)$  correspondant à ce tableau. Que constatez-vous ?
- 2.4. On peut améliorer la précision de la méthode d'Euler en modifiant la valeur du pas  $\Delta t$ . Quelle modification pourrait-on apporter à la valeur du pas  $\Delta t$  ? Quel serait l'inconvénient de cette modification ?

## Exercice II – Système d'allumage classique dans un moteur à essence



L'inflammation du mélange air-essence dans le moteur d'une voiture est provoquée par une étincelle qui jaillit entre les bornes d'une bougie d'allumage. Cette étincelle apparaît lorsque la valeur absolue de la tension aux bornes de la bougie est supérieure à 10 000 volts. On peut modéliser le circuit électrique par le schéma ci-dessus, avec :

- $E = 12$  V, tension aux bornes de la batterie, considérée comme un générateur idéal de tension ;
- La bobine du circuit primaire est modélisée par une inductance pure  $L$  en série avec une résistance  $r = 6,0 \Omega$  ;
- Le rupteur est un interrupteur commandé par le mouvement mécanique du moteur ;
- Le rôle du transformateur est d'obtenir une tension de sortie  $u_2$  très élevée aux bornes de la bougie. Les propriétés du transformateur sont telles que les grandeurs  $u_2$  et  $i_1$  sont liées par la relation :

$$u_2 = \alpha \frac{di_1}{dt}$$

où  $i_1$  est l'intensité du courant dans le circuit primaire et  $\alpha$  une constante indépendante du temps, positive. Aucune autre connaissance concernant le fonctionnement du transformateur n'est nécessaire pour résoudre l'exercice.

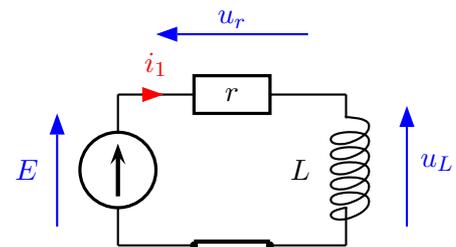
L'objectif de l'exercice est de montrer que des étincelles

se produisent aux bornes de la bougie lorsque le rupteur est ouvert.

### 1. Étude du circuit primaire sans condensateur

#### 1.1. Rupteur fermé

Le circuit primaire peut être alors modélisé selon le schéma suivant :



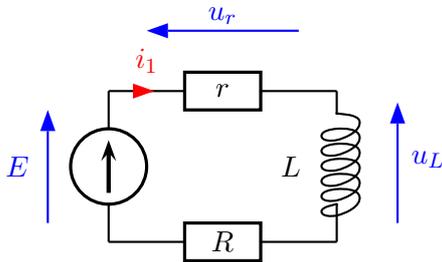
- 1.1.1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'intensité  $i_1$  s'écrit :

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{r}{L}i_1 = \frac{E}{L}$$

- 1.1.2. Que devient cette équation différentielle en régime permanent ?
- 1.1.3. En déduire la valeur de l'intensité  $I_1$  du courant dans le circuit primaire en régime permanent.
- 1.1.4. Peut-il y avoir une étincelle aux bornes de la bougie en régime permanent ? Justifier.

## 1.2. Rupteur ouvert

Lorsque le rupteur s'ouvre (à une date choisie pour origine des dates), il se produit une étincelle à ses bornes. L'air devient alors conducteur et le rupteur se comporte comme un conducteur ohmique de résistance  $R$  de plusieurs mégaohms. Le circuit primaire peut alors être modélisé selon le schéma suivant :



1.2.1. Quel est l'effet de la bobine sur la rupture du courant ?

1.2.2. On donne l'expression temporelle de l'intensité  $i_1(t)$  pour  $t \geq 0$  :

$$i_1(t) = \frac{E}{R+r} + \left( I_1 - \frac{E}{R+r} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec :

$$\tau = \frac{L}{R+r}$$

Les trois courbes ci-dessous représentent des allures possibles de l'évolution de l'intensité  $i_1$  du courant en fonction du temps :

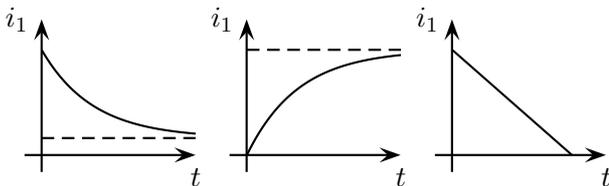


Figure a

Figure b

Figure c

En justifiant, choisir la seule compatible avec l'expression de  $i_1(t)$ .

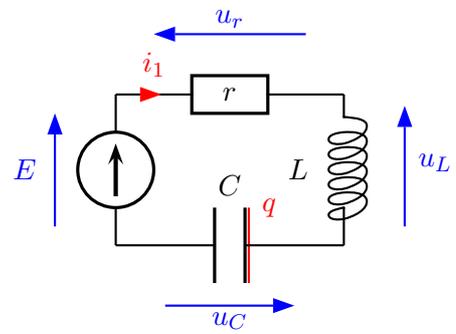
1.2.3. On donne en annexe 2, à rendre avec la copie, l'allure de l'évolution de la valeur absolue de la tension  $u_2(t)$  définie dans l'introduction.

À partir de cette courbe, déterminer la valeur de la constante  $\tau$ .

1.2.4. À partir de quelle date peut-on considérer qu'il n'y a plus d'étincelle aux bornes de la bougie ?

## 2. Étude du circuit primaire avec condensateur et rupteur ouvert

Pour que l'étincelle n'endommage pas le rupteur au moment de son ouverture, un condensateur est branché en dérivation aux bornes du rupteur. Lorsque le rupteur s'ouvre, le circuit primaire peut alors être modélisé selon le schéma suivant :



L'équation différentielle vérifiée par la charge  $q$  du condensateur est :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L} \quad (1)$$

2.1. Cas où  $r = 0$

On considère le cas d'une bobine idéale. L'équation différentielle correspondante est alors :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L} \quad (2)$$

On propose l'expression temporelle de la charge :

$$q(t) = Q_0 \cos\left(2\pi \frac{t}{\gamma}\right) + CE$$

On prendra comme origine des dates l'instant  $t = 0$  s pour lequel  $q(t = 0 \text{ s}) = Q_0 + CE$  avec  $Q_0 > 0$ .

2.1.1. Donner l'expression littérale de l'intensité :

$$i_1 = \frac{dq(t)}{dt}$$

2.1.2. Donner l'expression littérale de la dérivée seconde de la charge du condensateur :

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

2.1.3. En remplaçant dans l'équation différentielle (2), montrer que la fonction  $q(t)$  proposée est une solution de l'équation différentielle (2) si et seulement si  $\gamma = 2\pi\sqrt{LC}$ .

2.1.4. Que représente  $\gamma$  pour ce circuit ?

2.1.5. En utilisant la réponse à la question 2.1.2, montrer que :

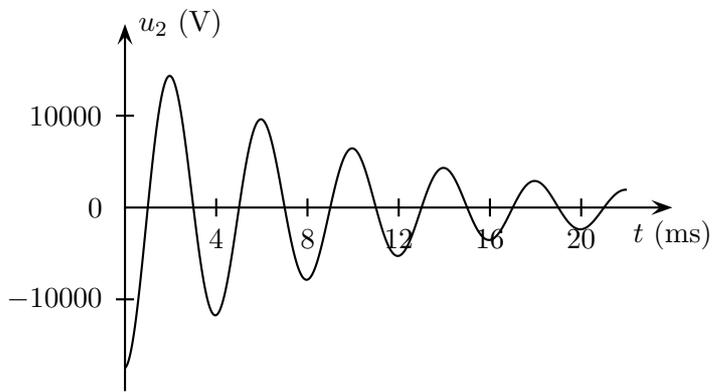
$$u_2(t) = -A \cos\left(2\pi \frac{t}{\gamma}\right)$$

où  $A$  est une constante positive.

2.1.6. Tracer l'allure de la variation de la tension  $u_2(t)$  en fonction du temps et qualifier le régime observé.

2.2. Cas où  $r \neq 0$

L'allure de la variation temporelle de la tension  $u_2(t)$  réellement observée est représentée sur la figure ci-dessous :



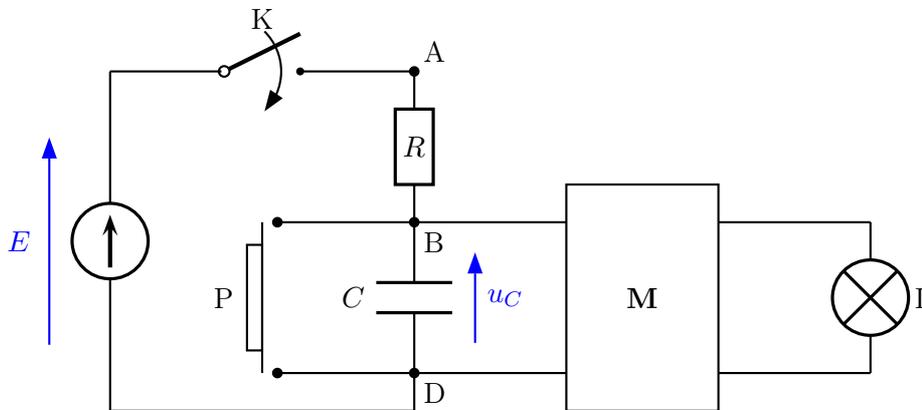
**2.2.1.** Qualifier le régime observé et expliquer pourquoi l'amplitude de la tension  $u_2(t)$  décroît au cours du temps.

**2.2.2.** Expliquer, grâce à la courbe précédente, pourquoi en présence du condensateur il y a des « étincelles » aux bornes de la bougie plutôt qu'une étincelle unique.

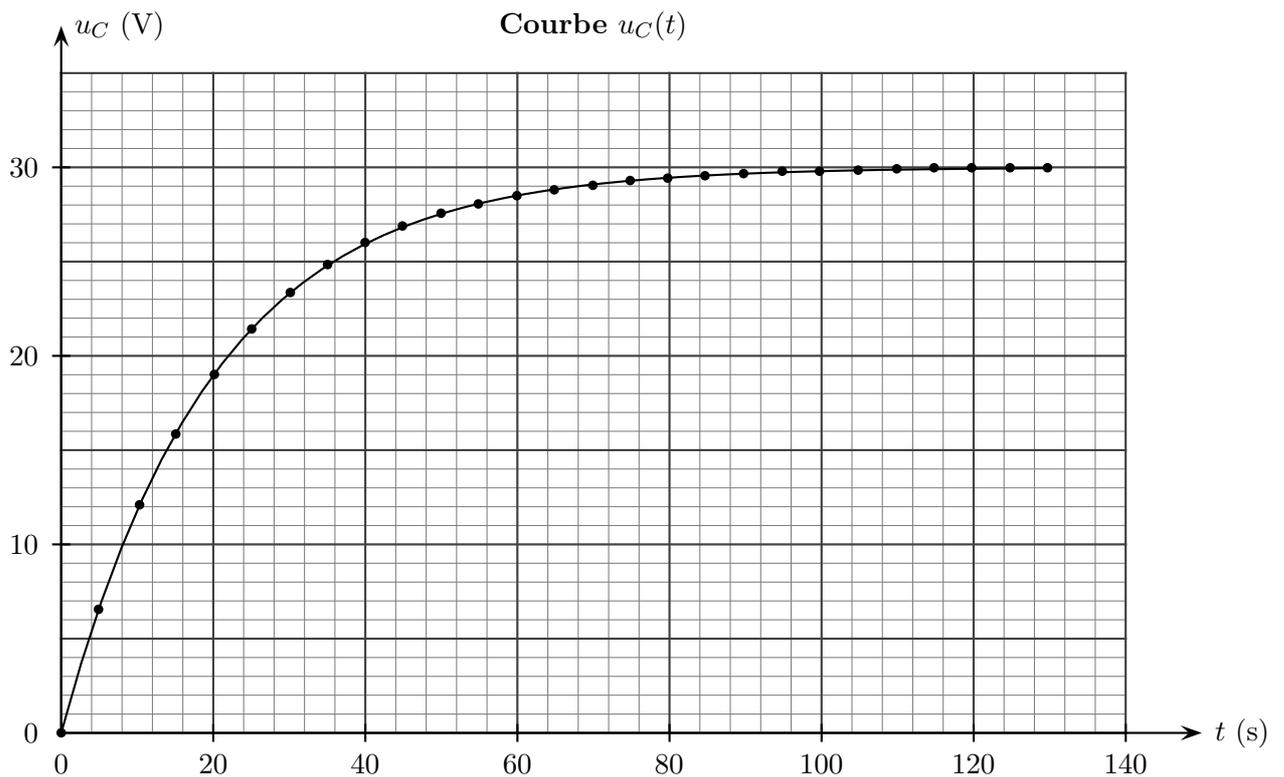
Nom : ..... Prénom : .....

Annexe 1 – À rendre avec la copie

**Document 1**



**Document 2**

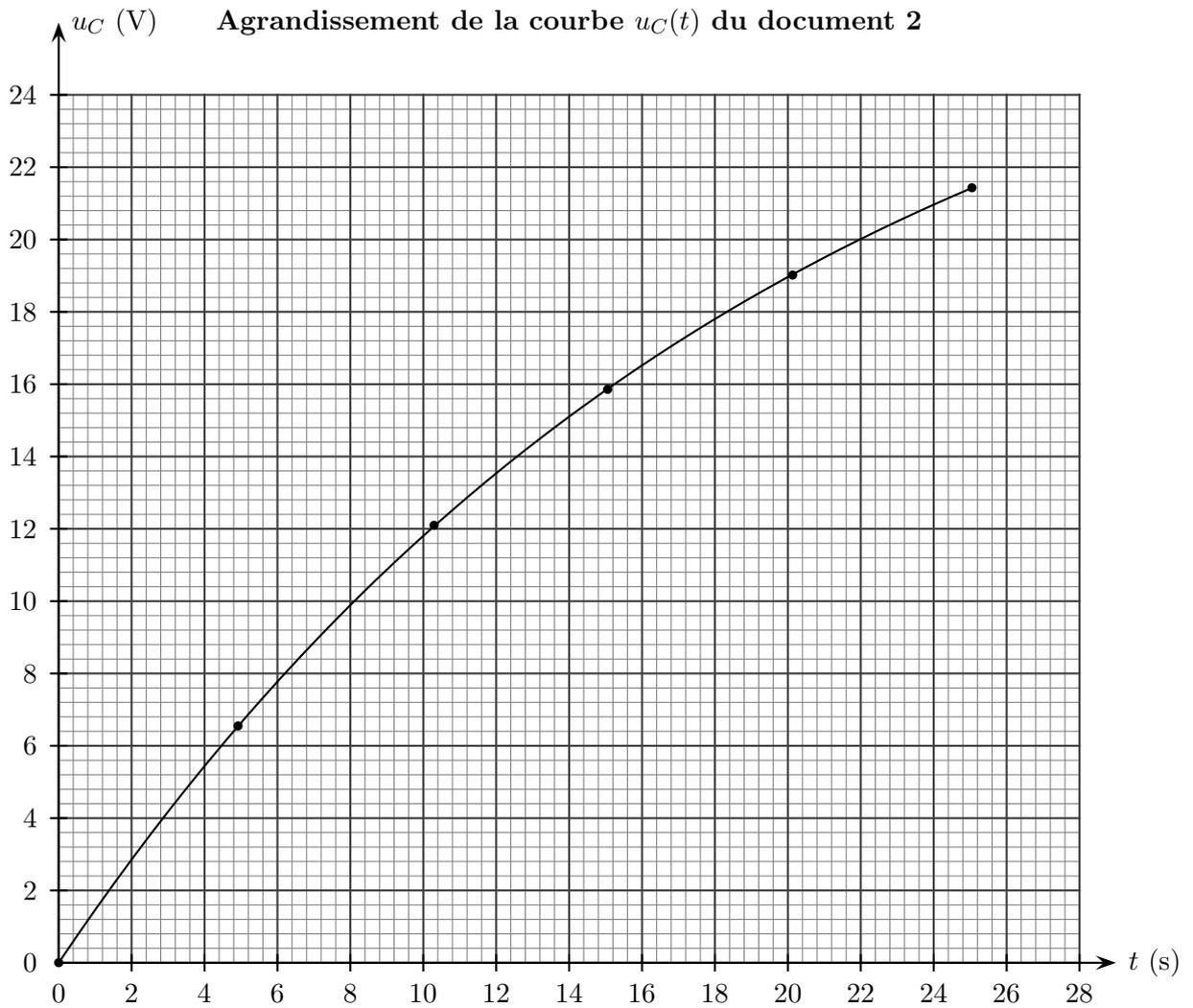


Nom : ..... Prénom : .....

**Document 3**

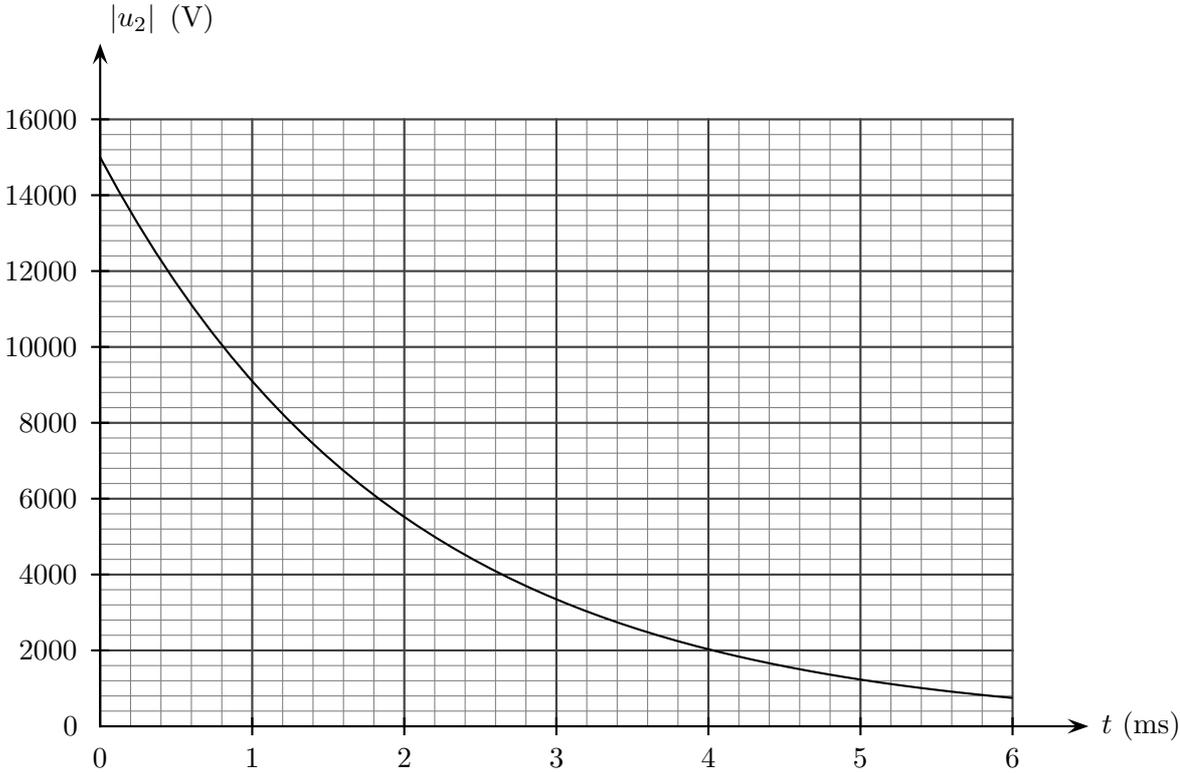
$t$ (s)	0	2	4	6	8	10	12	...	20
$u_C$ (V)	0			8,14	10,3	12,3	14,1	...	19,6
$\frac{du_C(t)}{dt}$ ( $V \cdot s^{-1}$ )	1,50			1,09	0,99	0,89	0,80	...	0,52

**Document 4**



Nom : ..... Prénom : .....

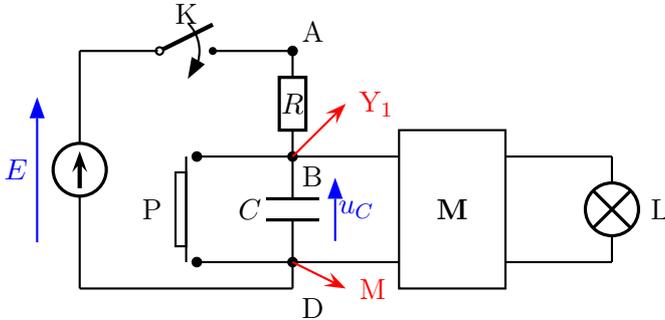
**Annexe 2 – À rendre avec la copie**



## Exercice I – Principe de fonctionnement d'une minuterie

### 1. Étude du circuit $RC$

1.1. On branche la voie 1 en B et la masse en D :



Ceci permet d'observer la tension  $u_C$  sur l'oscilloscope.

1.2. Loi d'additivité des tensions :

$$E = u_{AB} + u_C$$

Loi d'Ohm :  $u_{AB} = Ri$  avec le sens conventionnel de l'intensité  $i$  tel qu'indiqué sur le schéma précédent ;

Pour le condensateur de capacité  $C$  :

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{et} \quad q = Cu_C \quad \Rightarrow \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

En remplaçant dans la loi d'Ohm :

$$u_{AB} = RC \frac{du_C}{dt}$$

En remplaçant dans la loi d'additivité des tensions :

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$$

qui est l'équation différentielle demandée.

1.3. a. Dérivons la forme proposée par rapport au temps :

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Remplaçons dans l'équation différentielle :

$$E = RC \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} + A (1 - e^{-t/\tau})$$

Factorisons par l'exponentielle et par  $A$ , regroupons :

$$E - A = A \left( \frac{RC}{\tau} - 1 \right) e^{-t/\tau}$$

Le premier membre de cette équation est constant, le second membre est une constante

multipliée par l'exponentielle, qui seule dépend du temps ; pour que cette relation soit vraie, il faut que les deux constantes soient nulles ;

$$\begin{aligned} E - A = 0 \quad \text{et} \quad \frac{RC}{\tau} - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad A = E \quad \text{et} \quad \tau = RC \end{aligned}$$

b. En régime permanent,  $u_C = \text{cte}$ , donc en remplaçant dans l'équation différentielle :

$$\frac{du_C}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_C = E$$

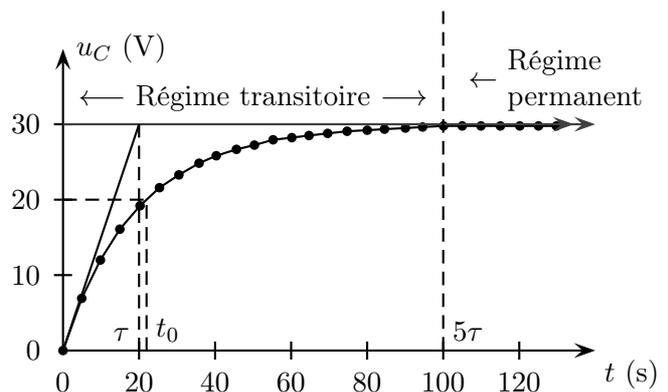
Numériquement :  $u_C = 30 \text{ V}$ .

c.  $\tau$  est la constante de temps. Analyse dimensionnelle :

$$[\tau] = [RC] = \Omega \cdot F = \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot \frac{\text{C}}{\text{V}} = \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}} = \text{s}$$

1.4. Tracés de :

- l'asymptote horizontale  $u_C = E$  ;
- la tangente à l'origine, qui coupe l'asymptote à l'abscisse  $t = \tau$  ;
- La limite  $t \sim 5\tau$  entre régimes transitoire et permanent ;
- la lecture graphique de  $t_0$  pour  $u_C = U_\ell = 20 \text{ V}$ , utile pour la suite.



1.5.  $\tau = RC = 100 \times 10^3 \times 200 \times 10^{-6} = 20 \text{ s}$  ; accord parfait avec le résultat de la lecture graphique.

1.6. a. La lampe s'éteint au bout de la durée  $t_0$  pour laquelle :

$$u(t_0) = U_\ell = E (1 - e^{-t_0/\tau})$$

Isolons le terme exponentiel en développant le second membre :

$$U_\ell = E - Ee^{-t_0/\tau} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-t_0/\tau} = \frac{E - U_\ell}{E}$$

On prends le logarithme des deux membres, puis on inverse la fraction argument du logarithme pour changer son signe :

$$-\frac{t_0}{\tau} = \ln\left(\frac{E - U_\ell}{E}\right) \Leftrightarrow t_0 = \tau \ln\left(\frac{E}{E - U_\ell}\right)$$

b. Application numérique :

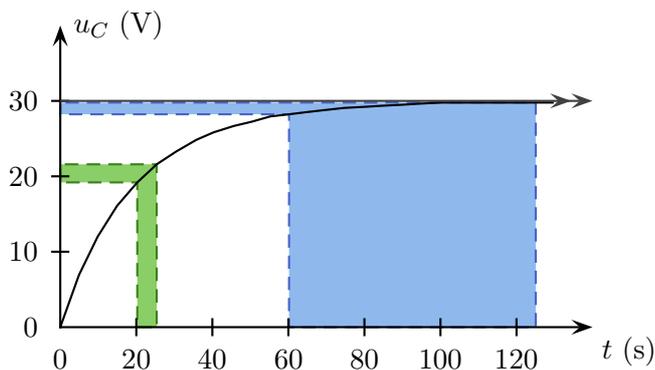
$$t_0 = 20 \times \ln\left(\frac{30}{30 - 20}\right) = 22 \text{ s}$$

Valeur confirmée par lecture graphique.

c. Le choix  $t_0 \gg \tau$  aurait présenté un risque de voir la lampe allumée en permanence, si jamais le condensateur n'arrive pas à se charger à la tension de consigne  $U_\ell$ .

De plus cela aurait ajouté une nette incertitude sur le temps  $t_0$  de charge, une faible variation dans la mesure de  $U_\ell$  par le système de commande se répercutant par un valeur de  $t_0$  très différente.

La construction ci-dessous montre que l'on obtient une marge d'erreur sur  $t_0$  bien plus large pour une erreur sur  $u_C$  quasi-identique.



1.7. Pour changer la durée d'allumage de la lampe, il faut augmenter  $\tau = RC$ , soit en augmentant  $R$ , soit en augmentant  $C$ , soit les deux à la fois.

$$\tau = RC \Leftrightarrow R = \frac{\tau}{C}$$

Application numérique pour  $\tau = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$  et  $C = 200 \mu\text{F}$  :

$$R = \frac{60}{200 \times 10^{-6}} = 3,00 \times 10^5 \Omega = 300 \text{ k}\Omega$$

1.8. Lorsque l'on appuie sur le bouton poussoir, les deux bornes du condensateur sont reliées, autrement dit en *court-circuit*, donc la tension aux bornes du condensateur est nulle :  $u_C = 0 \text{ V}$ .

On a alors  $u_C < U_\ell$ , la lampe s'allume instantanément si elle était éteinte, et le reste si elle l'était déjà, avec réinitialisation de la durée avant extinction.

Typiquement, la durée correspond au temps nécessaire pour descendre deux étages, il faut donc appuyer sur le bouton à chaque étage pair ou impair, suivant la parité de l'étage initial.

## 2. Méthode d'Euler

2.1. On isole la dérivée de  $u_C$  dans le membre de gauche, en divisant par  $RC$  et en réarrangeant :

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC}u_C + \frac{E}{RC}$$

On approxime la dérivée avec le pas  $\Delta t$  proposé :

$$\frac{du_C}{dt} \simeq \frac{\Delta u_C}{\Delta t} = \frac{u_C(t + \Delta t) - u_C(t)}{\Delta t}$$

Cette dernière relation est similaire à celle donnée dans le texte :

$$\Leftrightarrow u_C(t + \Delta t) = u_C(t) + \frac{du_C}{dt} \Delta t$$

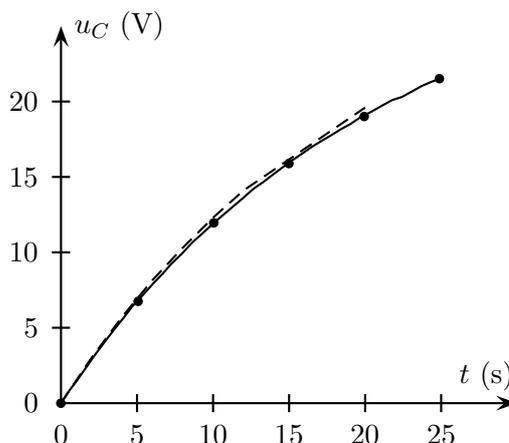
2.2. Pour  $t = 2 \text{ s}$  :

$$\begin{cases} u_C(2\text{s}) = 0 + 1,50 \times 2 = 3,00 \text{ V} \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{2\text{s}} = -\frac{1}{20} \times 3,00 + \frac{30}{20} = 1,35 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

Pour  $t = 4 \text{ s}$  :

$$\begin{cases} u_C(4\text{s}) = 3,00 + 1,35 \times 2 = 5,70 \text{ V} \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{4\text{s}} = -\frac{1}{20} \times 5,70 + \frac{30}{20} = 1,22 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

2.3. Tracé des points calculés avec la méthode d'Euler en pointillés :



On constate un assez bon accord.

2.4. On peut améliorer la précision de la méthode d'Euler en diminuant le pas de calcul  $\Delta t$ . L'inconvénient est alors qu'il faut faire beaucoup plus de calculs pour couvrir un même domaine de temps ; on peut alors confier ces calculs à un ordinateur.

## Exercice II – Système d'allumage classique dans un moteur à essence

### 1. Étude du circuit primaire sans condensateur

#### 1.1. Rupteur fermé

##### 1.1.1. Loi d'additivité des tensions :

$$u_R + u_L = E$$

Loi d'Ohm et expression de la tension aux bornes de la bobine :

$$u_R = r i_1 \quad \text{et} \quad u_L = L \frac{di_1}{dt}$$

On remplace ces deux expressions :

$$r i_1 + L \frac{di_1}{dt} = E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{di_1}{dt} + \frac{r}{L} i_1 = \frac{E}{L}$$

1.1.2. En régime permanent, la dérivée par rapport au temps est nulle, l'intensité  $i_1$  du courant prend sa valeur limite  $I_1$  telle que :

$$0 + \frac{r}{L} I_1 = \frac{E}{L} \quad \Leftrightarrow \quad I_1 = \frac{E}{r}$$

La bobine idéale se comporte alors comme un court-circuit (un interrupteur fermé). Application numérique :

$$I_1 = \frac{12}{6,0} = 2,0 \text{ A}$$

1.1.4. D'après ce qui est expliqué dans le texte, la tension  $u_2$  aux bornes du circuit secondaire, s'exprime par :

$$u_2 = \alpha \frac{di_1}{dt}$$

En régime permanent, la dérivée temporelle est nulle, donc :

$$u_2 = 0 \text{ V}$$

La tension aux bornes de la bougie étant nulle, il ne peut donc pas y avoir d'étincelle.

#### 1.2. Rupteur ouvert

1.2.1. La bobine *lisse* les variations brutales de l'intensité : elle les « interdit ». Elle va tenter de maintenir l'intensité constante  $I_1$  du courant comme avant l'ouverture de l'interrupteur, elle s'oppose à la rupture du courant, d'où une étincelle aux bornes du rupteur.

1.2.2. L'expression proposée pour  $i_1$  montre un départ en  $t = 0$  s avec une valeur constante non-nulle :

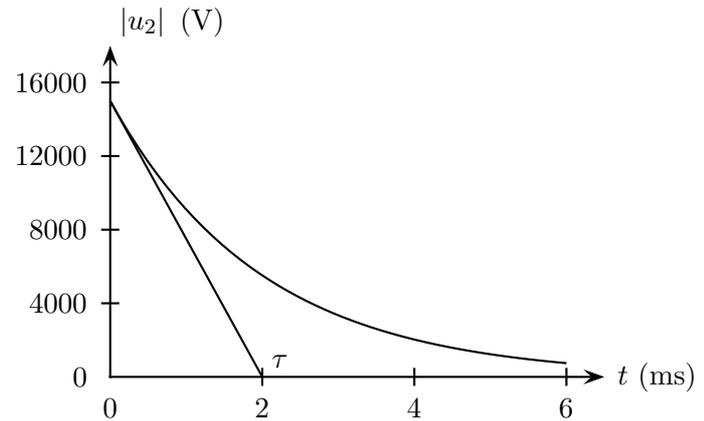
$$i_1(t = 0 \text{ s}) = \frac{E}{R+r} + \left( I_1 - \frac{E}{R+r} \right) e^0 = I_1 \neq 0$$

puis une décroissance radioactive à mettre sur le compte du terme  $e^{-t/\tau}$ . Au bout d'un temps infini, l'intensité ne sera pas nulle :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \frac{E}{R+r} \neq 0$$

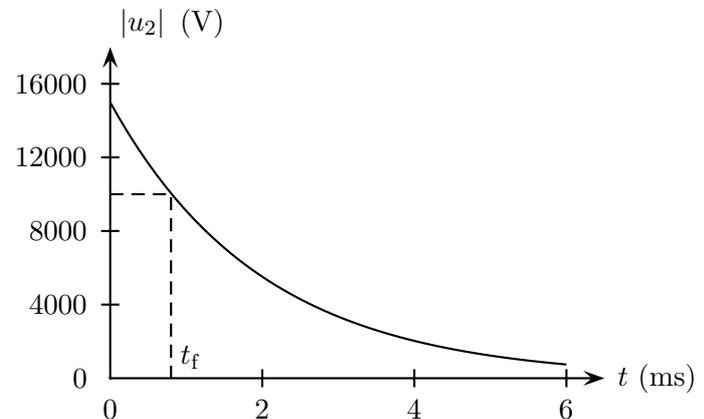
Seule la **figure a** répond à ces trois critères.

1.2.3. Sur la figure de l'annexe 2, on trace la tangente à l'origine, qui coupe l'axe des abscisses en  $t = \tau$  :



Lecture graphique :  $\tau = 2,0$  ms.

1.2.4. L'énoncé indique qu'une étincelle apparaît aux bornes de la bobine pour  $|u_2| > 10\,000$  V. On détermine graphiquement le temps  $t_f$  correspondant à la fin de l'apparition de l'étincelle :



Lecture graphique :  $t_f = 0,8$  ms.

### 2. Étude du circuit primaire avec condensateur et rupteur ouvert

2.1.1. On dérive l'expression de  $q(t)$  proposée :

$$i_1(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -Q_0 \frac{2\pi}{\gamma} \sin \left( 2\pi \frac{t}{\gamma} \right)$$

2.1.2. On dérive une seconde fois :

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} = -Q_0 \left( \frac{2\pi}{\gamma} \right)^2 \cos \left( 2\pi \frac{t}{\gamma} \right)$$

**2.1.3.** On remplace dans l'équation différentielle (2) :

$$-Q_0 \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 \cos\left(2\pi\frac{t}{\gamma}\right) + \frac{Q_0}{LC} \cos\left(2\pi\frac{t}{\gamma}\right) + \frac{CE}{LC} = \frac{E}{L}$$

On simplifie par le rapport  $E/L$  dans les deux membres, et on regroupe les termes en cosinus :

$$\left[-Q_0 \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 + \frac{Q_0}{LC}\right] \cos\left(2\pi\frac{t}{\gamma}\right) = 0$$

Ce produit est constant si et seulement si l'un des deux termes est constant ; le cosinus dépendant du temps, ceci implique que le terme constant devant le cosinus est nul. En factorisant par  $Q_0$  :

$$Q_0 \left[-\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right] = 0$$

Le cas  $Q_0 = 0$  C est sans intérêt quoique physiquement possible ; il reste :

$$\begin{aligned} -\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 + \frac{1}{LC} = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{LC} \\ &\Leftrightarrow \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &\Leftrightarrow \gamma = 2\pi\sqrt{LC} \end{aligned}$$

**2.1.4.**  $\gamma$  représente la période propre  $T_0$  du circuit  $LC$ .

**2.1.5.** En suivant les l'indications de l'énoncé, on remplace  $i_1(t)$  par son expression en fonction de  $q(t)$  :

$$u_2(t) = \alpha \frac{di_1(t)}{dt} = \alpha \frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

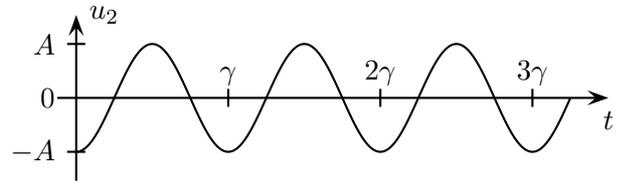
On remplace la dérivée seconde de  $q(t)$  par l'expression trouvée au 2.1.2 :

$$u_2(t) = -\alpha Q_0 \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 \cos\left(2\pi\frac{t}{\gamma}\right)$$

On démontre bien ainsi l'expression demandée, avec une constante  $A$  positive qu'il faut bien entendu préciser :

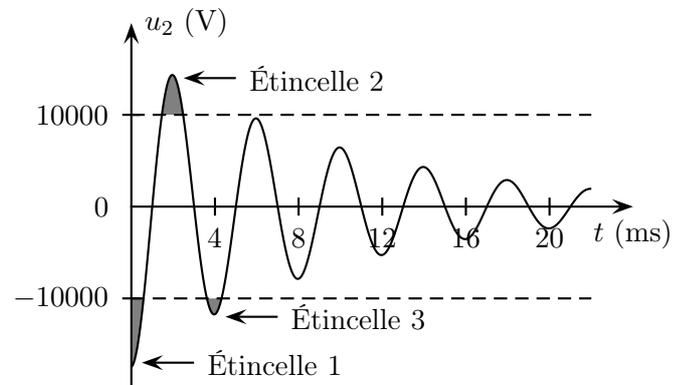
$$A = \alpha Q_0 \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2$$

**2.1.6.** Le régime est périodique ; l'allure est celle de l'opposé d'un cosinus, et l'on s'attend à ce que figurent les constantes clefs du mouvement — période  $\gamma$ , amplitude  $A$  :



**2.2.1.** Il s'agit d'un régime pseudo-périodique amorti. L'amplitude de la tension  $u_2(t)$  décroît en raison de l'énergie absorbée par effet Joule dans la bobine de résistance interne  $r \neq 0$ .

**2.2.2.** On constate que les amplitudes des oscillations précédentes sont très élevées ; l'énoncé indique qu'une étincelle apparaît lorsque la tension  $u_2$  aux bornes de la bobine est supérieure à 10 000 V (alors que la batterie de la voiture n'est toujours qu'en 12 V : il s'agit du phénomène de surtension aux bornes du condensateur).



Sous une telle tension, l'air cesse d'être isolant, on a claquage (formation d'un éclair, tout comme entre deux nuages ou entre un nuage et le sol). Cette tension est atteinte au moins trois fois lors de ces oscillations, on a donc un *train* d'étincelles.

## I - Minuterie

.../21

- Voie 1 en B, Masse en D
- Démo équa diff
- Démo équa diff
- Démo  $A = E$
- Démo  $\tau = RC$
- Régime permanent :  $u_C = E = 30 \text{ V}$ , justifié
- Analyse dimensionnelle  $[\tau]$
- Tracé de l'asymptote horizontale  $u_C = E$
- Tracé pour  $\tau = 20 \text{ s}$  document 2
- Limite  $t \sim 5\tau$  transitoire/permanent ou équivalent
- Calcul  $\tau = RC = 20 \text{ s}$
- $t_0 = \tau \ln\left(\frac{E}{E-U_\ell}\right)$ , démontré
- $t_0 = 22 \text{ s}$
- Lecture graphique  $t_0 = 22 \text{ s}$  pour  $U_\ell = 20 \text{ V}$
- Discussion choix  $t_0 \gg \tau$  non judicieux
- Augmenter  $R$  ou/et  $C$
- $R = \frac{\tau}{C} = 300 \text{ k}\Omega$
- Bouton poussoir  $\Rightarrow u_C = 0 \text{ V}$ , justifié
- Allumée  $\Rightarrow$  le reste, éteinte  $\Rightarrow$  s'allume
- $\frac{du_C}{dt} = -u_C/60 + 0,5$
- Calcul  $u_C(2\text{s}) = 3,00 \text{ V}$  et  $\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{2\text{s}} = 1,35 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$
- Calcul  $u_C(4\text{s}) = 5,70 \text{ V}$  et  $\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{4\text{s}} = 1,22 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$
- Tracé deuxième courbe, bon accord
- Diminuer  $\Delta t$ , inconvenient : plus de calculs

## II - Allumage

.../19

- Démo équa diff
- Démo équa diff
- $I_1 = E/r = 2,0 \text{ A}$
- Pas d'étincelle car  $u_2 = \alpha \frac{di_1}{dt} = 0 \text{ V}$
- Bobine : lisse le courant
- Départ  $i_1(t = 0 \text{ s}) = I_1 \neq 0$ , donc figure a ou c
- Évolution en  $e^{-t/\tau}$ , donc figure a
- Fin  $i_1(t \rightarrow \infty) = E/R + r \neq 0$ , donc figure a
- Tracé pour  $\tau = 2,0 \text{ ms}$  en annexe 2
- Lecture graphique  $t_f = 0,8 \text{ ms}$  pour  $10\,000 \text{ V}$
- Dérivées  $-Q_0 \frac{2\pi}{\gamma} \sin(\dots)$  et  $-Q_0 \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 \cos(\dots)$
- Démo  $\gamma = 2\pi\sqrt{LC}$
- Démo  $\gamma = 2\pi\sqrt{LC}$
- $\gamma$  période propre
- Démo  $u_2(t) = A \cos(\dots)$  avec  $A = \alpha Q_0 \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2$
- Démo  $u_2(t) = A \cos(\dots)$  avec  $A = \alpha Q_0 \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2$
- Tracé d'un  $-\cos(\dots)$ , régime périodique
- Régime pseudo-périodique amorti, effet Joule  $r \neq 0$
- Courbe  $3\times$  au dessus de  $10\,000 \text{ V}$ , train d'étincelles

Total

.../40

Note

.../20

## I - Minuterie

.../21

- Voie 1 en B, Masse en D
- Démo équa diff
- Démo équa diff
- Démo  $A = E$
- Démo  $\tau = RC$
- Régime permanent :  $u_C = E = 30 \text{ V}$ , justifié
- Analyse dimensionnelle  $[\tau]$
- Tracé de l'asymptote horizontale  $u_C = E$
- Tracé pour  $\tau = 20 \text{ s}$  document 2
- Limite  $t \sim 5\tau$  transitoire/permanent ou équivalent
- Calcul  $\tau = RC = 20 \text{ s}$
- $t_0 = \tau \ln\left(\frac{E}{E-U_\ell}\right)$ , démontré
- $t_0 = 22 \text{ s}$
- Lecture graphique  $t_0 = 22 \text{ s}$  pour  $U_\ell = 20 \text{ V}$
- Discussion choix  $t_0 \gg \tau$  non judicieux
- Augmenter  $R$  ou/et  $C$
- $R = \frac{\tau}{C} = 300 \text{ k}\Omega$
- Bouton poussoir  $\Rightarrow u_C = 0 \text{ V}$ , justifié
- Allumée  $\Rightarrow$  le reste, éteinte  $\Rightarrow$  s'allume
- $\frac{du_C}{dt} = -u_C/60 + 0,5$
- Calcul  $u_C(2\text{s}) = 3,00 \text{ V}$  et  $\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{2\text{s}} = 1,35 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$
- Calcul  $u_C(4\text{s}) = 5,70 \text{ V}$  et  $\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{4\text{s}} = 1,22 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$
- Tracé deuxième courbe, bon accord
- Diminuer  $\Delta t$ , inconvenient : plus de calculs

## II - Allumage

.../19

- Démo équa diff
- Démo équa diff
- $I_1 = E/r = 2,0 \text{ A}$
- Pas d'étincelle car  $u_2 = \alpha \frac{di_1}{dt} = 0 \text{ V}$
- Bobine : lisse le courant
- Départ  $i_1(t = 0 \text{ s}) = I_1 \neq 0$ , donc figure a ou c
- Évolution en  $e^{-t/\tau}$ , donc figure a
- Fin  $i_1(t \rightarrow \infty) = E/R + r \neq 0$ , donc figure a
- Tracé pour  $\tau = 2,0 \text{ ms}$  en annexe 2
- Lecture graphique  $t_f = 0,8 \text{ ms}$  pour  $10\,000 \text{ V}$
- Dérivées  $-Q_0 \frac{2\pi}{\gamma} \sin(\dots)$  et  $-Q_0 \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 \cos(\dots)$
- Démo  $\gamma = 2\pi\sqrt{LC}$
- Démo  $\gamma = 2\pi\sqrt{LC}$
- $\gamma$  période propre
- Démo  $u_2(t) = A \cos(\dots)$  avec  $A = \alpha Q_0 \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2$
- Démo  $u_2(t) = A \cos(\dots)$  avec  $A = \alpha Q_0 \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2$
- Tracé d'un  $-\cos(\dots)$ , régime périodique
- Régime pseudo-périodique amorti, effet Joule  $r \neq 0$
- Courbe  $3\times$  au dessus de  $10\,000 \text{ V}$ , train d'étincelles

Total

.../40

Note

.../20