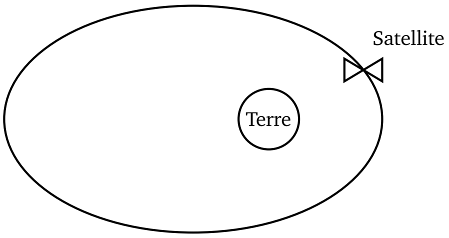
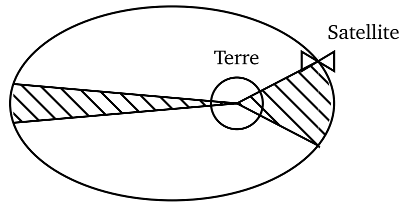
Correction des exercices (fin) – TS2 2013
Physique Chapitre 8 – Mouvements dans les champs

Exercice n°11 p. 173 – Illustrer les lois de Képler

1. Première loi de Képler appliquée aux satellites de la Terre : dans le référentiel géocentrique, les satellites décrivent des orbites elliptiques dont le centre de la Terre est l'un des foyers.
   Représentation d'une telle trajectoire elliptique :



2. Deuxième loi de Képler appliquée aux satellites de la Terre : dans le référentiel géocentrique, le rayon vecteur $\overrightarrow{TS}$ reliant le centre d'inertie T de la Terre et le centre d'inertie S du satellite balaye des aires égales pendant des durées égales.
   Représentation de quelques segments d'aires égales :



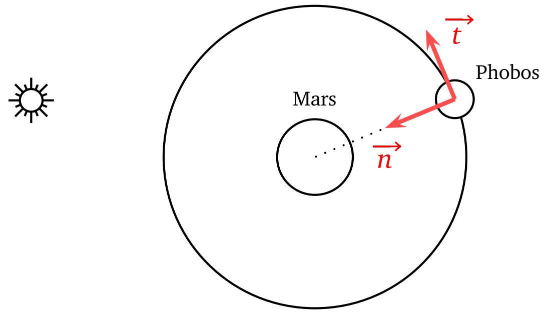
Exercice n°12 p. 173 – Décrire le mouvement d'une planète

1. Un mouvement circulaire uniforme correspond à une trajectoire circulaire, parcourue à vitesse de valeur (ou norme) $v = ||\overrightarrow{v}||$ constante.

2. Puisque le mouvement est uniforme, il suffit de connaître le rayon R de l'orbite, donc la distance parcourue lors d'une révolution ou périmètre $2\pi R$, et de diviser par la période de révolution T.
   Alternativement, si l'on ne connaît pas la période, il suffit d'appliquer la deuxième loi de Newton dans le référentiel héliocentrique, supposé galiléen. Dans ce référentiel, Vénus est supposée soumise à une seule force, la force d'interaction gravitationnelle exercée par le Soleil $\overrightarrow{F}_{S/V}$. L'accélération est donc égale à l'intensité du champ de pesanteur exercé par le Soleil. Cette accélération est centripète, elle est dirigée selon le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de la base mobile de Frenet centrée sur Vénus $(V, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n})$. Comme la valeur $a = ||\overrightarrow{a}||$ de cette accélération est égale par définition à v^2/R, on en déduit la valeur de la vitesse $v = ||\overrightarrow{v}||$ de Vénus.

Exercice n°13 p. 173 – Phobos

1. Le référentiel d'étude est le référentiel centré sur le centre de gravité de Mars, dont les trois axes pointent vers trois étoiles supposées fixes.
   Le satellite Phobos quant à lui peut être affublé d'une base mobile dite de Frenet $(P, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n})$, tel que représenté ci-dessous.



2. Système : { Phobos } ;
   Référentiel : centré sur Mars, supposé galiléen ;
   Bilan des forces : l'interaction gravitationnelle exercée par Mars sur Phobos :

$$\overrightarrow{F}_{M/P} = G \cdot \frac{m_M \cdot m_P}{MP^2} \overrightarrow{n}$$

   Direction le segment (MP), sens vers Mars M, valeur $F_{M/P} = ||\overrightarrow{F}_{M/P}||$, point d'application le centre de gravité P de Phobos.
   Deuxième loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m_P \cdot \overrightarrow{a} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F}_{M/P} = m_P \, \overrightarrow{a}$$

$$\Rightarrow \quad G \cdot \frac{m_M \cdot m_P}{MP^2} \overrightarrow{n} = m_P \, \overrightarrow{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a} = G \cdot \frac{m_M}{MP^2} \overrightarrow{n}$$

3. On constate sur l'expression précédente que le vecteur accélération est centripète, c'est-à-dire constamment selon le rayon du cercle, et donc constamment perpendiculaire au vecteur vitesse, ce dernier étant toujours tangent à la trajectoire. Ainsi, le produit scalaire des deux vecteurs est nul :

$$\overrightarrow{a} = a \cdot \overrightarrow{n} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} \stackrel{\Delta}{=} v \cdot \overrightarrow{t} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

Par suite, le mouvement est uniforme (expliqué « avec les mains », à aucun moment le vecteur accélération « n'allonge » le vecteur vitesse, il ne fait que changer sa direction).
Alternativement, on peut utiliser la formule du cours exprimant le vecteur accélération dans une base de Frenet, pour un mouvement plan :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{t} + \frac{v^2}{\mathrm{MP}} \cdot \overrightarrow{n}$$

Ici $\overrightarrow{a} = a \cdot \overrightarrow{n}$ donc $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ et par suite la valeur de la vitesse est constante : $v = \text{cte}$, le mouvement est uniforme.

Exercice n°17 p. 174 – Étude du canon à électrons

1.a. Système : { électron } ;
Référentiel : terrestre supposé galiléen ;
Bilan des forces : force électrostatique :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = q \cdot \overrightarrow{\mathrm{E}}$$

La charge élémentaire est notée e, donc $q = -e$ pour l'électron et par suite :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = -e \cdot \overrightarrow{\mathrm{E}}$$

Force de direction horizontale, de sens de la gauche vers la droite (sens opposé à celui du vecteur champ électrique $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ en raison du signe de la charge), appliquée sur l'électron, et de valeur ou norme :

$$\mathrm{F} = || \overrightarrow{\mathrm{F}} || = |q| \cdot || \overrightarrow{\mathrm{E}} || = |q| \cdot \mathrm{E} = e \cdot \mathrm{E}$$

Deuxième loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{\mathrm{F}}_{ext} = m_e \overrightarrow{a} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{F}} = m_e \overrightarrow{a}$$

$$\Rightarrow \quad -e \overrightarrow{\mathrm{E}} = m_e \overrightarrow{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a} = -\frac{e}{m_e} \overrightarrow{\mathrm{E}}$$

En utilisant les coordonnées du vecteur champ électrique $\overrightarrow{\mathrm{E}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} \left| \begin{array}{l} \mathrm{E}_x = -\mathrm{E} \\ \mathrm{E}_y = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} \left| \begin{array}{l} a_x = \dfrac{e}{m_e}\mathrm{E} \\ \\ a_y = 0 \end{array} \right.$$

On intègre ces coordonnées par rapport au temps pour obtenir les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v} \left| \begin{array}{l} v_x = \dfrac{e}{m_e}\mathrm{E}t + v_{0x} \\ \\ v_y = v_{0y} \end{array} \right.$$

Les deux constantes d'intégration v_{0x} et v_{0y} sont déterminées par les conditions initiales ; les électrons étant émis avec une vitesse initiale négligeable, ces deux constantes sont nulles. Par suite :

$$\overrightarrow{v} \left| \begin{array}{l} v_x = \dfrac{e}{m_e}\mathrm{E}t \\ \\ v_y = 0 \end{array} \right.$$

1.b. La valeur ou norme de la vitesse est donnée par :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{e}{m_e}\mathrm{E}t$$

2. On intègre les coordonnées du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\dfrac{e}{m_e}\mathrm{E}t^2 + x_0 \\ \\ y = y_0 \end{array} \right.$$

Les deux constantes d'intégration x_0 et y_0 sont déterminées par les conditions initiales ; les électrons étant émis à l'origine O du repère, ces deux constantes sont nulles. Par suite :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\dfrac{e}{m_e}\mathrm{E}t^2 \\ \\ y = 0 \end{array} \right.$$

3.a. Quand l'électron parvient à la plaque B du condensateur, il a parcouru la distance $d = \mathrm{AB}$. À l'aide de l'équation horaire $x(t)$, trouvons le temps t_B correspondant :

$$x\left(t_\mathrm{B}\right) = d = \frac{1}{2}\frac{e}{m_e}\mathrm{E}t_\mathrm{B}^2 \quad \Leftrightarrow \quad t_\mathrm{B} = \sqrt{\frac{2dm_e}{e\mathrm{E}}}$$

On remplace alors cette expression du temps t_B dans l'équation horaire trouvée à la question 1.b, donnant la vitesse $v(t)$:

$$v\left(t_\mathrm{B}\right) = v_\mathrm{B} = \frac{e\mathrm{E}}{m_e}t_\mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{B} = \frac{e\mathrm{E}}{m_e}\sqrt{\frac{2dm_e}{e\mathrm{E}}}$$

$$\Rightarrow \quad v_\mathrm{B} = \sqrt{\frac{2e^2\mathrm{E}^2dm_e}{e\mathrm{E}m_e^2}}$$

$$\Rightarrow \quad v_\mathrm{B} = \sqrt{\frac{2e\mathrm{E}d}{m_e}}$$

3.b. Application numérique :

$$v_\mathrm{B} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}60 \times 10^{-19} \times 6{,}00 \times 10^4 \times 3{,}00 \times 10^{-2}}{9{,}11 \times 10^{-31}}}$$

$$v_\mathrm{B} = 2{,}5 \times 10^7 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Comparaison avec la célérité de la lumière, vitesse maximale pour toute particule :

$$\frac{v}{c} = \frac{2,5 \times 10^7}{3,0 \times 10^8} = 0,083 = 8,3\,\%$$

Au delà de 10 % de la célérité de la lumière, la mécanique « classique » ne s'applique plus, il faut utiliser les formules de la mécanique « relativiste ».

On remarque au passage que l'électron, particule très légère, peut très rapidement atteindre des vitesses « relativistes » : quelques centimètres d'accélération dans un champ électrique suffit.

Exercice n°20 p. 176 – Poids ou force électrostatique

1.a. Force électrostatique $\overrightarrow{F_e}$ sur l'électron :

$$\overrightarrow{F_e} = q \cdot \overrightarrow{E}$$

La charge élémentaire est notée e, donc $q = -e$ pour la charge électrique de l'électron, et par suite :

$$\overrightarrow{F_e} = -e \cdot \overrightarrow{E}$$

1.b. La valeur ou norme de la force électrostatique est :

$$F_e = ||\overrightarrow{F_E}|| = |q| \cdot ||\overrightarrow{E}|| = |q| \cdot E = e \cdot E$$

Application numérique :

$$F_e = 1,6 \times 10^{-19} \times 50\,000$$
$$F_e = 8,0 \times 10^{-15} \text{ N}$$

2.a. Poids $\overrightarrow{P_e}$ de l'électron :

$$\overrightarrow{P_e} = m_e \cdot \overrightarrow{g}$$

2.b. La valeur ou norme du poids est :

$$P_e = ||\overrightarrow{P_e}|| = m_e \cdot g$$

Application numérique :

$$P_e = 9,1 \times 10^{-31} \times 10$$
$$P_e = 9,1 \times 10^{-30} \text{ N}$$

3.a. Rapport de deux forces dont il est question :

$$\frac{F_e}{P_e} = \frac{8,0 \times 10^{-15}}{9,1 \times 10^{-30}} = 8,8 \times 10^{14}$$

On peut bien négliger le poids devant la force d'interaction électrostatique, le rapport de leurs valeurs dépassant allègrement la centaine.

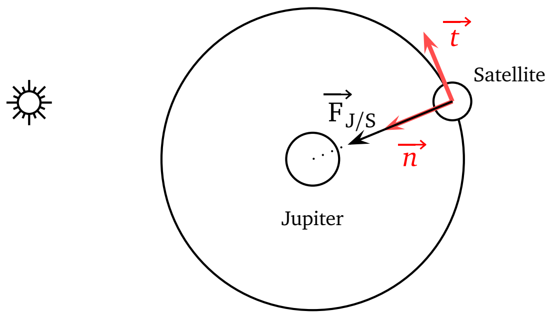
3.b. Le faisceau d'électron est donc dévié par la force électrostatique.

Exercice n°22 p. 177 – Quelle est la masse de Jupiter ?

1.a. Expression vectorielle de la force exercée par Jupiter J sur un satellite S, le satellite étant affublé de la base mobile de Frenet :

$$\overrightarrow{F}_{J/S} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \overrightarrow{n}$$

1.b. Schéma représentant la situation :



2. Système : { Satellite } ;
Référentiel : centré sur Jupiter, supposé galiléen ;
Bilan des forces : l'interaction gravitationnelle exercée par Jupiter sur le satellite, exprimée à la question 1.a ;
Deuxième loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m \cdot \overrightarrow{a} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F}_{J/S} = m\,\overrightarrow{a}$$
$$\Rightarrow \quad G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \overrightarrow{n} = m\,\overrightarrow{a}$$
$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a} = G \cdot \frac{M}{r^2} \overrightarrow{n}$$

On constate sur l'expression précédente que le vecteur accélération est centripète, c'est-à-dire constamment selon le rayon du cercle, et donc constamment perpendiculaire au vecteur vitesse, ce dernier étant toujours tangent à la trajectoire. Ainsi, le produit scalaire des deux vecteurs est nul :

$$\overrightarrow{a} = a \cdot \overrightarrow{n} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} \triangleq v \cdot \overrightarrow{t} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

Par suite, le mouvement est uniforme (expliqué « avec les mains », à aucun moment le vecteur accélération « n'allonge » le vecteur vitesse, il ne fait que changer sa direction). Alternativement, on peut utiliser la formule du cours exprimant le vecteur accélération dans une base de Frenet, pour un mouvement plan :

$$\overrightarrow{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \overrightarrow{t} + \frac{v^2}{r} \cdot \overrightarrow{n}$$

Ici $\overrightarrow{a} = a \cdot \overrightarrow{n}$ donc $\frac{dv}{dt} = 0$ et par suite la valeur de la vitesse est constante : $v = \text{cte}$, le mouvement est uniforme.

3. D'après l'étude de la question précédente, la valeur ou norme du vecteur accélération du satellite vaut :

$$a = \mathrm{G} \cdot \frac{\mathrm{M}}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

On simplifie par r et on isole la valeur de la vitesse v :

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\mathrm{GM}}{r}}$$

On constate sur cette expression que plus le satellite est loin de Jupiter (r grand), plus sa vitesse est faible (v petit). On constate aussi que la masse m du satellite n'intervient pas. Par conséquent, seule la première proposition (« le satellite le plus proche de Jupiter ») correspond au satellite le plus rapide.

4. Il faut un temps égal à la période T au satellite pour faire un tour complet de son orbite. Dans l'hypothèse d'une orbite circulaire pour le satellite, de rayon r, la longueur de l'orbite est le périmètre $2\pi r$ du cercle. Cette orbite étant parcourue à vitesse constante,

$$v = \frac{2\pi r}{\mathrm{T}}$$

On remplace v par l'expression trouvée dans la question précédente :

$$\sqrt{\frac{\mathrm{GM}}{r}} = \frac{2\pi r}{\mathrm{T}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{T} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{\mathrm{GM}}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathrm{GM}}}$$

5.a. La représentation graphique proposée est une droite passant par l'origine, donc le carré de la période est proportionnel au cube de la distance entre les centres, soit $\mathrm{T}^2 = k \cdot r^3$, k étant une constante de proportionnalité, coefficient directeur ou pente de la droite. On retrouve la troisième loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire :

$$\frac{\mathrm{T}^2}{a^3} = k$$

réduite au cas d'un cercle pour lequel $a = r$.

5.b. À l'aide du résultat littéral de la question 4, cherchons l'expression littérale de la constante k :

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathrm{GM}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{T}^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathrm{GM}} \triangleq k$$

On peut donc déduire la masse M de Jupiter de la constante k par :

$$k = \frac{4\pi^2}{\mathrm{GM}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{M} = \frac{4\pi^2}{\mathrm{G}k}$$

Application numérique :

$$k = \frac{4\pi^2}{6,67 \times 10^{-11} \times 3,1 \times 10^{-16}}$$

$$k = 1,9 \times 10^{27}\ \mathrm{kg}$$

⋆⋆
⋆