Corrigé du DM n°4 – TS2 2013
Dilatation des durées & contraction des longueurs

Exercice n°20 p. 223 – Quand les durées se dilatent

1. Une durée propre est mesurée dans le référentiel propre, c'est-à-dire le référentiel dans lequel le dispositif étudié est immobile. Dans l'expérience présente, il s'agit du référentiel $\mathscr{R}_1$, lié à l'horloge de lumière et à l'observateur O_1.

2.a. Pour O_1, la lumière parcourt la distance 2L.

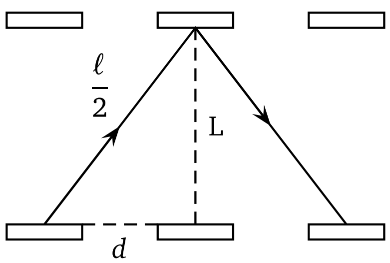
2.b. En notant c la célérité de la lumière et ΔT_0 la durée propre de l'aller-retour entre miroirs :

$$c = \frac{2L}{\Delta T_0} \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{c\Delta T_0}{2}$$

3.a. Le vaisseau se déplace à la vitesse v ; $\Delta T'/2$ est la durée d'un aller simple de la lumière. La distance d parcourue par le vaisseau dans R_2 pour l'observateur O_2 est donc :

$$v = \frac{d}{\frac{\Delta T'}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{v\Delta T'}{2}$$

3.b.



3.c. On applique le théorème de Pythagore et l'on remplace par les expressions trouvées aux questions **2.b** et **3.a** :

$$\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = d^2 + L^2$$

$$\frac{\ell}{2} = \sqrt{d^2 + L^2}$$

$$\frac{\ell}{2} = \sqrt{\frac{v^2\Delta T'^2}{4} + \frac{c^2\Delta T_0^2}{4}}$$

$$\ell = \sqrt{v^2\Delta T'^2 + c^2\Delta T_0^2}$$

4.a. Dans le référentiel $\mathscr{R}_2$, la lumière parcourt la distance ℓ dans le temps $\Delta T'$, donc :

$$c = \frac{\ell}{\Delta T'} \quad \Leftrightarrow \quad \ell = c\Delta T'$$

4.b. On remplace ℓ dans la formule de la question **3.c** et l'on élève au carré :

$$c\Delta T' = \sqrt{v^2\Delta T'^2 + c^2\Delta T_0^2}$$

$$c^2\Delta T'^2 = v^2\Delta T'^2 + c^2\Delta T_0^2$$

On regroupe les termes en $\Delta T'^2$ à gauche et les termes en ΔT_0 à droite :

$$\left(c^2 - v^2\right)\Delta T'^2 = c^2\Delta T_0^2$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta T'^2 = \Delta T_0^2$$

$$\Delta T'^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta T_0^2$$

On prend la racine carrée :

$$\Delta T' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\Delta T_0$$

$$\Delta T' = \gamma\Delta T_0 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

5. Par principe $0 < v < c$ donc :

$$0 < \frac{v^2}{c^2} < 1$$

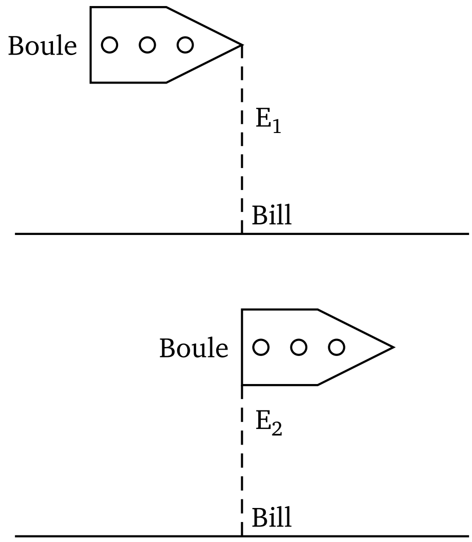
$$0 < 1 - \frac{v^2}{c^2} < 1$$

$$\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} > 1$$

Et donc $\Delta T' > \Delta T_0$: il s'agit bien d'une dilatation des durées.

Exercice n°22 p. 223 – Chéri, j'ai rétréci la navette

1. La durée mesurée par Bill est la durée propre, car il n'a pas bougé d'un millimètre pour effectuer cette mesure : elle est effectuée à sa verticale.



Or par définition le référentiel propre est celui dans lequel les deux évènements E_1 et E_2 se produisent au même point ; donc la durée propre est bien mesurée dans le référentiel de Bill.

2. Bill observe une navette à la vitesse v, une durée propre ΔT_0 et une longueur L_2 :

$$v = \frac{L_2}{\Delta T_0} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T_0 = \frac{L_2}{v}$$

Boule observe une vitesse de déplacement v, une durée ΔT et une longueur L_1 :

$$v = \frac{L_1}{\Delta T} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T = \frac{L_1}{v}$$

3. On exprime la dilatation des durées et l'on remplace $\Delta T'$ et ΔT_0 par leurs expressions précédentes :

$$\Delta T' = \gamma \Delta T_0$$

$$\frac{L_1}{v} = \gamma \frac{L_2}{v}$$

$$L_1 = \gamma L_2$$

$$L_2 = \frac{L_1}{\gamma}$$

4.a. La navette est immobile dans le référentiel de Boule. C'est donc L_1, longueur de la navette mesurée par Boule, qui est la longueur propre.

4.b. Comme démontré dans l'exercice précédent $\gamma > 1$, donc $L_2 > L_1$: on a bien contraction des longueurs (mais il ne s'agit que d'une conséquence de la dilatation des durées, et pas d'un phénomène distinct).

5. Application numérique :

$$L_2 = \frac{L_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{30}{\sqrt{1 - 0,90^2}} = 13 \text{ m}$$

⋆⋆
⋆

Grille DM n°4 – TS2 2013

N°20 p. 223 **.../12**

- ❑ Référentiel propre : celui de l'observateur O_1
- ❑ Distance 2L
- ❑ $2L = c\Delta T_0$ pour O_1
- ❑ $2d = v\Delta T'$ pour O_2
- ❑ Schéma triangle $\ell/2$, d et L
- ❑ Pythagore $\ell^2/4 = d^2 + L^2$
- ❑ $\ell = c\Delta T'$ pour O_2
- ❑ Démonstration $\Delta T' = \gamma\Delta T_0$
- ❑ Démonstration $\Delta T' = \gamma\Delta T_0$
- ❑ Démonstration $\Delta T' = \gamma\Delta T_0$
- ❑ $\gamma > 1$ justifié
- ❑ $\Delta T' > \Delta T_0$ donc dilatation

N°21 p. 223 **.../8**

- ❑ Référentiel propre : celui de Bill (terrestre)
- ❑ $L_2 = v\Delta T_0$
- ❑ $L_1 = v\Delta T$
- ❑ Démonstration $L_2 = L_1/\gamma$
- ❑ Démonstration $L_2 = L_1/\gamma$
- ❑ L_1 longueur propre, référentiel de Boule (navette)
- ❑ $L_2 < L_1$ donc contraction
- ❑ $L_2 = 13$ m

Note **.../20**

Grille DM n°4 – TS2 2013

N°20 p. 223 **.../12**

- ❑ Référentiel propre : celui de l'observateur O_1
- ❑ Distance 2L
- ❑ $2L = c\Delta T_0$ pour O_1
- ❑ $2d = v\Delta T'$ pour O_2
- ❑ Schéma triangle $\ell/2$, d et L
- ❑ Pythagore $\ell^2/4 = d^2 + L^2$
- ❑ $\ell = c\Delta T'$ pour O_2
- ❑ Démonstration $\Delta T' = \gamma\Delta T_0$
- ❑ Démonstration $\Delta T' = \gamma\Delta T_0$
- ❑ Démonstration $\Delta T' = \gamma\Delta T_0$
- ❑ $\gamma > 1$ justifié
- ❑ $\Delta T' > \Delta T_0$ donc dilatation

N°21 p. 223 **.../8**

- ❑ Référentiel propre : celui de Bill (terrestre)
- ❑ $L_2 = v\Delta T_0$
- ❑ $L_1 = v\Delta T$
- ❑ Démonstration $L_2 = L_1/\gamma$
- ❑ Démonstration $L_2 = L_1/\gamma$
- ❑ L_1 longueur propre, référentiel de Boule (navette)
- ❑ $L_2 < L_1$ donc contraction
- ❑ $L_2 = 13$ m

Note **.../20**