Chapitre 16

Étude énergétique des systèmes mécaniques

16.1 À bâtons rompus

a. Calculez le travail de la force exercée par l'opérateur sur l'extrémité d'un ressort de raideur $k = 100\ \text{N.m}^{-1}$, lorsque l'allongement x du ressort passe de 2,0 à 3,0 cm, puis de 3,0 à 2,0 cm.

b. Un solide de masse $m = 0,20$ kg oscille sans frottements à l'extrémité d'un ressort horizontal de constante de raideur $k = 10\ \text{N.m}^{-1}$. L'amplitude des oscillations est $x_{\text{m}} = 5,0$ cm. Calculez l'énergie mécanique de cet oscillateur, ainsi que la vitesse maximale du solide.

c. La chute d'une pomme aurait inspiré à Newton l'idée selon laquelle la force s'appliquant sur le fruit en chute est identique à celle s'appliquant sur la Lune (elle-même en chute libre, comme vous le savez). De quelle force s'agit-il dans les deux cas ? Si la pomme a une masse de $m = 100$ g et tombe de 2,5 m, quelle est sa vitesse à l'arrivée sur le crâne de Newton ?

d. Vous devez remplacer le ressort usagé d'une table de flipper ; il convient de bien choisir la constante de raideur k de ce ressort, afin que le jeu soit agréable. Quels paramètres devez-vous prendre en compte au moment du choix ?

e. Citez un exemple d'application pratique de la non-conservation de l'énergie mécanique d'un pendule pesant ; même chose pour un pendule élastique.

f. Donnez la définition de la puissance mécanique $\mathcal{P}$, en fonction du travail mécanique $W_{\text{A}\to\text{B}}$ d'une force constante $\overrightarrow{F}$, appliquée pendant la durée Δt. Considérez ensuite le cas d'une durée infinitésimale dt pour en déduire la relation entre $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{F}$ et le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$.

Travail d'une force

16.2 N°11 p. 315 : Catapultage d'un avion

16.3 N°12 p. 315 : Chute de rochers

Énergie potentielle élastique

16.4 Étude d'un oscillateur élastique

On dispose d'un ressort à spires non-jointives, de masse négligeable et de constante de raideur $k = 10\ \text{N.m}^{-1}$. On engage ce ressort sur une tige horizontale Ax : l'une de ses extrémités est fixée en A, l'autre est reliée à un cylindre creux (C), de masse $m = 100$ g, qui peut coulisser sans frottement le long de la tige.

L'abscisse x du centre d'inertie G de (C) est repérée par rapport à O, position de G à l'équilibre.

On écarte le cylindre de sa position d'équilibre et on le lâche. Il effectue des oscillations. Un dispositif d'acquisition permet d'obtenir l'abscisse x et la coordonnée v de sa vitesse en fonction du temps. À l'instant $t_0 = 0$ choisi pour origine des dates, $x_0 = -2,0$ cm et $v_0 = 0,28\ \text{m.s}^{-1}$.

a. Schématiser le dispositif, à la date t_0, en dessinant la force exercée par le ressort sur le cylindre.

b. Calculer l'énergie mécanique de cet oscillateur à la date t_0.

c. Déterminer la vitesse de G au passage par la position d'équilibre, ainsi que les positions de G pour lesquelles la vitesse s'annule.

16.5 N°15 p. 316 : Lance-pierres

Énergie potentielle de pesanteur

16.6 Montagnes russes

Un train de montagne russe, initialement au repos, descend une pente vertigineuse et effectue, à partir du niveau du sol, une boucle verticale (*looping*) de 9,0 m de hauteur. Au sommet de cette boucle, le train possède une vitesse égale à 42 km/h.

En négligeant les frottements, évaluer la hauteur de départ du train.

16.7 N°25 p. 317 : Snowboard

Énergie mécanique

16.8 ER p. 312 : Système solide-ressort

16.9 N°23 p. 317 : Oscillateur horizontal

Projectile dans le champ de pesanteur

16.10 ER p. 313 : Balle de tennis

16.11 Un *drive* au golf

Un golfeur frappe sa balle, lui communiquant une vitesse initiale $v_0 = 40\ \text{m.s}^{-1}$, dans une direction faisant un angle $\alpha = 40°$ avec l'horizontale. La masse de la balle de golf est de 46 g.

a. Décrire, sans démonstration, la forme de la trajectoire du centre d'inertie de la balle en faisant l'hypothèse simplificatrice que l'action de l'air est négligeable.

b. Quelle est la propriété de la composante horizontale du vecteur vitesse du centre d'inertie au cours du mouvement ?

c. Déterminer l'énergie mécanique de la balle au cours de sa trajectoire.

d. En déduire l'altitude du point culminant de la trajectoire. Conclure.

Corrigé 16

Étude énergétique des systèmes mécaniques

16.1 À bâtons rompus

a. À partir de la longueur $\ell = \ell_0 + x$, pour provoquer un déplacement supplémentaire $\overrightarrow{d\ell} = dx \cdot \overrightarrow{i}$, l'opérateur doit fournir un travail élémentaire :

$$\delta W = \overrightarrow{F}_{\text{op}} \cdot \overrightarrow{d\ell} = k \cdot x \cdot \overrightarrow{i} \cdot dx \cdot \overrightarrow{i} = k \cdot x \cdot dx$$

La travail de la force variable $\overrightarrow{F}_{\text{op}}$ qui fait passer l'allongement de $x_{\text{A}} = 2,0$ cm à $x_{\text{B}} = 3,0$ cm est donc :

$$W\left(\overrightarrow{F}_{\text{op}}\right) = \int_{x_{\text{A}}}^{x_{\text{B}}} kx\text{d}x = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_{\text{A}}}^{x_{\text{B}}} = \frac{1}{2}kx_{\text{B}}^2 - \frac{1}{2}kx_{\text{A}}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad W\left(\overrightarrow{F}_{\text{op}}\right) = \frac{1}{2}k\left(x_{\text{B}}^2 - x_{\text{A}}^2\right)$$

Application numérique :

$$W = \frac{1}{2} \times 100 \times \left(0,030^2 - 0,020^2\right) = 0,025 \text{ J}$$

Lorsque l'allongement passe de 3,0 cm à 2,0 cm, le travail est opposé :

$$W = -0,025 \text{ J}$$

b. Lorsque l'élongation de l'oscillateur est maximale, sa vitesse et son énergie cinétiques sont nulles ; l'énergie mécanique est tout entière sous forme d'énergie potentielle élastique :

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}kx_{\text{m}}^2$$

Application numérique :

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2} \times 10 \times \left(5,0 \times 10^{-2}\right)^2 = 1,2 \times 10^{-2} \text{ J}$$

L'énergie mécanique est constante au cours du mouvement (sans frottements) ; la vitesse maximale est atteinte lorsque l'énergie cinétique est maximale et l'énergie potentielle nulle :

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}mv_{\text{m}}^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_{\text{m}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{m}}}{m}}$$

Application numérique :

$$v_{\text{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,2 \times 10^{-2}}{0,20}} = 0,35 \text{ m.s}^{-1}$$

c. Autant concernant la Lune que la pomme, la force qui s'applique est l'interaction gravitationnelle avec la Terre — le *poids* du corps.
En supposant un mouvement de chute libre pour la pomme, son énergie mécanique se conserve ; l'origine des énergies potentielles est choisit comme étant le sommet du crâne de Newton, l'énergie potentielle de la pomme placée 2,5 m au dessus vaut donc :

$$E_{\text{pp}} = mgh = 0,100 \times 9,81 \times 2,5 = 2,5 \text{ J}$$

$$\Rightarrow \quad E_{\text{m}} = 2,5 \text{ J}$$

où l'on s'est placé dans le cas d'une vitesse initiale de chute nulle. À l'impact, cette énergie est totalement convertie en énergie cinétique, de sorte que l'on peut écrire :

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}mv_{\text{m}}^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_{\text{m}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{m}}}{m}}$$

Application numérique :

$$v_{\text{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2,5 \times 10^{-2}}{0,100}} = 7,0 \text{ m.s}^{-1}$$

d. La masse de la boule de flipper, la longueur et l'inclinaison de la table de flipper (pour trouver la hauteur maximale à laquelle doit avoir accès la boule), et surtout l'intensité de la pesanteur g de la planète (de masse M_{p} et de rayon R_{p}) sur laquelle doit être utilisé ce flipper :

$$g = \mathcal{G}\frac{M_{\text{p}}}{R_{\text{p}}^2} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.kg}^{-2}.\text{m}^2$$

e. Pendule pesant : nécessité de *remonter* une horloge comtoise ;
Pendule élastique : affaiblissement progressif des oscillations des *suspensions* d'une *2CV* (sur les voitures récentes, les suspensions n'oscillent plus, car elles sont réglées au régime critique).

f. Puissance = énergie divisée par durée :

$$\mathcal{P} = \frac{W_{\text{A}\to\text{B}}}{\Delta t}$$

Pour une durée infinitésimale :

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W_{\text{A}\to\text{B}}}{\text{d}t} = \overrightarrow{F} \cdot \frac{\overrightarrow{d\ell}}{\text{d}t} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$$

Travail d'une force

16.2 N°11 p. 315 : Catapultage d'un avion

La force de catapultage F étant supposée constante, supposée colinéaire et de même sens que le déplacement d, son travail s'exprime simplement par :

$$W = F \cdot d \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{W}{d}$$

Application numérique :

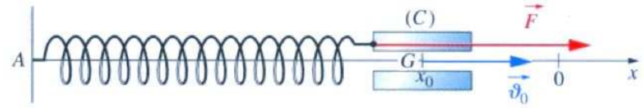
$$F = \frac{3 \times 10^6}{50} = 6 \times 10^4 \text{ N}$$

16.3 N°12 p. 315 : Chute de rochers

Énergie potentielle élastique

16.4 Étude d'un oscillateur élastique

a. À $t_0 = 0$, l'abscisse $x_G = \overline{OG}$ est négative et la vitesse $\vec{v}$ est positive.



b. L'énergie mécanique de l'oscillateur est :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

À l'instant du lancement :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

Application numérique :

$$E_m = \frac{1}{2} \times 0,100 \times 0,28^2 + \frac{1}{2} \times 10 \times 0,020^2 = 5,9 \times 10^{-3} \text{ J}$$

c. Le mouvement ayant lieu sans frottement, l'énergie mécanique se conserve, sa valeur est constante.
Au passage par sa position d'équilibre ($x = 0$), l'énergie potentielle élastique est nulle, et l'énergie cinétique est maximale. Il en est de même pour la vitesse $v = v_{max}$:

$$E_m = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2E_m}{m}}$$

Application numérique :

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \times 5,9 \times 10^{-3}}{0,100}} = 0,34 \text{ m.s}^{-1}$$

Lorsque la vitesse s'annule, l'énergie cinétique est nulle, et l'énergie potentielle est maximale. Il en est de même pour l'élongation $|x| = x_{max}$:

$$E_m = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_{max} = \sqrt{\frac{2E_m}{k}}$$

Application numérique :

$$x_{max} = \sqrt{\frac{2 \times 5,9 \times 10^{-3}}{0,10}} = 3,4 \text{ cm}$$

La vitesse s'annule pour :

$$\begin{cases} x = -3,4 \text{ cm} \\ x = +3,4 \text{ cm} \end{cases}$$

16.5 N°15 p. 316 : Lance-pierres

Énergie potentielle de pesanteur

16.6 Montagnes russes

En négligeant les frottements, l'énergie mécanique se conserve ; sa valeur est identique au sommet y_{max} et en haut du looping $y_{loop} = 9,0$ m et $v_{loop} = 42$ km/h $\simeq 12$ m.s^{-1} :

$$mgy_{max} = \frac{1}{2}mv_{loop}^2 + mgy_{loop}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_{max} = \frac{1}{2}\frac{v_{loop}^2}{g} + y_{loop}$$

Application numérique : $y_{max} \simeq 16$ m.

16.7 N°25 p. 317 : Snowboard

Énergie mécanique

16.8 ER p. 312 : Système solide-ressort

16.9 N°23 p. 317 : Oscillateur horizontal

Projectile dans le champ de pesanteur

16.10 ER p. 313 : Balle de tennis

16.11 Un *drive* au golf

⋆⋆
⋆